

Quantificateurs (Exercices)

① Écrire à l'aide des quantificateurs :

"Entre deux réels distincts, il y a toujours un rationnel"

$$\underline{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2}, x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$$

"f est constante"

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0))$$

"Un carré de réel est toujours positif"

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

En vous aidant de la négation :

"Il n'existe pas d'entier plus grand que les autres"

Neg

Il existe un _____

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, n \geq k \quad F$$

Prop

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : n < k \quad \checkmark$$

"f n'est pas périodique"

Neg

f périodique

$$\exists T \in \mathbb{R}^* : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$$

Prop

$$\forall T \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R} : f(x+T) \neq f(x)$$

"f ne prend jamais deux fois la même valeur"

Neg

f prend deux fois la même valeur

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq b \text{ et } f(a) = f(b)$$

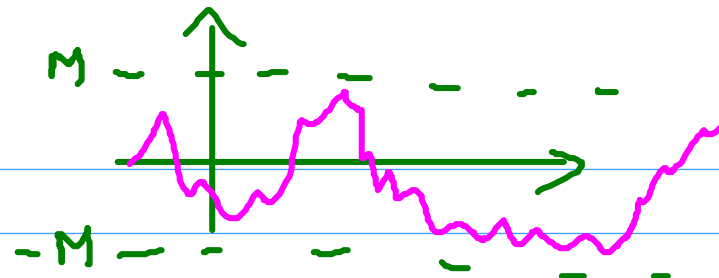
Prop

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \underbrace{a = b}_Q \text{ ou } \underbrace{f(a) \neq f(b)}_{\text{Non P}}$$

$$P \Rightarrow Q$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

② Traduire en français et nier :



a) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < M$

$\uparrow$
f bornée $(\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq M)$ nég.

b) $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n$

$$u_0 = u_k = u_{2k} = u_{3k}$$

(u_n) périod. $(\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : u_{n+k} \neq u_n)$ nég

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : f(x) = y$

f est à valeurs dans $\mathbb{R}$

$(\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \neq y)$ nég

d) $\exists y \in \mathbb{R} : \left[\overset{f \text{ const. de valeur } y}{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y} \right]$ f const.

Neg $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq y$

$P \Leftrightarrow Q : (P \Rightarrow Q) \text{ ET } (Q \Rightarrow P)$
 $: (Q \text{ OU NON } P) \text{ ET } (P \text{ OU NON } Q)$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\overset{P}{f(x) > 0} \Leftrightarrow \overset{Q}{x < 0} \right)$ $\text{NON } (P \Leftrightarrow Q) : (\text{NON } Q \text{ ET } P) \text{ OU } (\text{NON } P \text{ ET } Q)$
 f est str. pos. sur $\mathbb{R}_-^*$ et f nég. sur $\mathbb{R}_+$

Neg $\exists x \in \mathbb{R} : [(x > 0 \text{ ET } f(x) > 0) \text{ OU } (f(x) \leq 0 \text{ ET } x < 0)]$

f) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$ f impaire

Neg $\exists x \in \mathbb{R} : f(-x) \neq -f(x)$

g) $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, \left[\exists k \in \mathbb{Z} : (n = km) \right]$
 n est un mult. de m

Il existe un entier mult. de tous les autres

Neg $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{Z}, n \neq km$

Exercice bonus

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

Exprimer avec $\forall$ et $\exists$:

- a) f a au moins deux racines
- b) f a au plus deux racines
- c) f a exactement deux racines
- d) f a un nombre fini de racines
- e) f a une infinité de racines

Racine x :
 $f(x) = 0$

Solutions : martinroussard.fr

