

Réurrence (s)

Principe de récurrence

" $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ "
" $\forall n \geq 4, P(n)$ "

$P(n)$: prédicat impliquant un entier naturel n

Initialisation : $P(0)$ est vraie

$\vdash \leftarrow 1^{\text{er}}$ bonneau

ET (Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$)

$\vdash \leftarrow n+1$
 $\vdash \leftarrow n$ 
 $\vdots$
 $?$

$\Rightarrow$ Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

$$[P(0) \text{ ET } (\forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1)))] \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$$

Exemple : Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, $2^m \geq m+1$ $\overbrace{P(m)}$ $\triangle$ Inégalité

Initialisation : $2^0 = 1$ $0+1 = 1$ $2^0 \geq 0+1$

$P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $P(m)$ soit vraie

On veut $P(m+1)$: " $2^{m+1} \geq (m+1)+1$ " $\Leftrightarrow$ " $2^{m+1} \geq m+2$ "

$2^m \geq m+1$ donc $\underline{2^{m+1}} \geq 2m+2 \geq \underline{m+2}$

$2m+2 \geq m+2 \Leftrightarrow 2m \geq m \Leftrightarrow m \geq 0$

Or $m \geq 0$ donc $2m+2 \geq m+2$ donc $2^{m+1} \geq 2m+2 \geq m+2$
 $P(m+1)$ vraie

Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}$, $2^m \geq m+1$

Réurrence double

Initialisation : $\overset{Q(0)}{P(0)}$ et $P(1)$ sont vraies $\quad \begin{array}{c} \text{H} \\ \text{H} \end{array} \begin{array}{c} -2e \\ -1e \end{array} \quad \begin{array}{c} : \\ : \end{array}$

Hérédité : $\forall m \in \mathbb{N}, \left(\underline{P(m) \text{ ET } P(m+1)} \right) \Rightarrow \underline{P(m+2)}$ $\begin{array}{c} \text{H} \\ \text{H} \end{array} \begin{array}{c} m+2 \\ m+1 \\ m \end{array} \quad \begin{array}{c} : \\ : \\ : \end{array}$

Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}, \overset{Q(m)}{P(m)}$ est vraie $\quad \begin{array}{c} Q(m+1) \\ : \end{array}$

$Q(m) : "P(m) \text{ ET } P(m+1)"$

Init : $Q(0) : P(0) \text{ ET } P(1)$

Hér : $\forall m \in \mathbb{N}, \quad Q(m) \Rightarrow Q(m+1)$

$$(P(m) \text{ ET } P(m+1)) \Rightarrow (P(m+1) \text{ ET } P(m+2))$$

$$(P(m) \text{ ET } P(m+1)) \Rightarrow P(m+2)$$

Exemple : Soit (u_n) telle que
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$
 $\text{P}(n)$

Initialisation : $P(0)$: " $u_0 = 2^0$ " ✓ $P(1)$: " $u_1 = 2^1 = 2$ " ✓

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\text{P}(n)$ et $\text{P}(n+1)$ vraies

On veut $P(n+2)$: " $u_{n+2} = 2^{n+2}$ " H $\underbrace{u_n = 2^n}_m$ $\underbrace{u_{n+1} = 2^{n+1}}_{m+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n = 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2} \end{aligned} \quad P(n+2) \checkmark$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$

Réurrence forte

Initialisation : $P(0)$ vraie

Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, (P(0) \text{ ET } \dots \text{ ET } P(n)) \Rightarrow P(n+1)$
 $(\forall k \leq n, P(k))$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie

$R(n)$: " $\forall k \leq n, P(k)$ "

Init : $R(0)$: " $\forall k \leq 0, P(k)$ " $\Leftrightarrow P(0)$

Hér : $\forall n \in \mathbb{N}$
 $R(n) \Rightarrow R(n+1)$
 $(P(0) \text{ ET } \dots \text{ ET } P(n)) \Rightarrow (P(0) \text{ ET } \dots \text{ ET } \underline{P(n+1)})$
 $(P(0) \text{ ET } \dots \text{ ET } P(n)) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n)$

Exemple : Tout entier $[n \geq 2]$ est premier ou produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier $P(2)$ vraie

Hérédité : Soit $n \geq 2$ tq $P(2), \dots, P(n)$ vraies

On veut $P(n+1)$: " $n+1$ est premier ou prod. ..."

$n+1$ est premier : ✓

$n+1$ non premier : $n+1 = \underset{\uparrow}{a} \times \underset{\uparrow}{b}$ où $\begin{cases} 2 \leq a \leq n & P(a) \checkmark \\ 2 \leq b \leq n & P(b) \checkmark \end{cases}$

$P(n+1)$ vraie

$p_1 \times p_2 \times \dots \quad q_1 \times q_2 \times \dots$

Conclusion : $\forall n \geq 2, n$ est premier ou prod. ...

À vous de jouer !

① Suite de Fibonacci $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+2} = u_{m+1} + u_m \end{cases}$

Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right]$

② Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, x^m + \frac{1}{x^m} \in \mathbb{Z}$

