

Réurrence (Exercices)

① Suite de Fibonacci $\begin{cases} u_0=0, u_1=1 \\ \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+2} = u_{m+1} + u_m \end{cases}$

Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right]$ " P(m)

Init: $\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} (1-1) = 0 = u_0 \checkmark$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = u_1 \checkmark \end{aligned}$$

Spér: Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ et $P(n+1)$

On veut montrer $P(n+2)$: " $u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$ "

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right] \checkmark$$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

cd: $\checkmark$

② Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$) P(1)

Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$, " $x^m + \frac{1}{x^m} \in \mathbb{Z}$ " $\overset{P(m)}{P(m)}$ "
 $P(0)$: " $x^0 + \frac{1}{x^0} \in \mathbb{Z}$ "
 " $1 + 1 \in \mathbb{Z}$ "

Init: P(0) vraie, P(1) vraie

Hér: Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tq $\overset{P(m-1)}{P(m)}$ vraies On veut mg $x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} \in \mathbb{Z}$

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = \underline{x^{m+1}} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} + \underline{\frac{1}{x^{m+1}}}$$

$$x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} = \underbrace{\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)}_{\in \mathbb{Z}} \overset{P(m+1)}{P(m+1)} \checkmark$$

cdl!

Exercices bonus

- (Poly LG)
- ① Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ tel que
- i) $1 \in A$
 - ii) $\forall m \in \mathbb{N}^*, m \in A \Rightarrow 2m \in A$
 - iii) $\forall m \in \mathbb{N}^*, m+1 \in A \Rightarrow m \in A$

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$ $\mathbb{N}^* \subset A$ $\forall m \in \mathbb{N}^*, m \in A$

- ② Montrer que pour tout $n \geq 3$, il existe n entiers str. positifs et deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$ tels que :

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$$

Solutions : martintraussard.fr