

Logique

Implications et équivalences

Implication : (Si P , alors Q)

Notation : $P \Rightarrow Q$ P "implique" Q

Ex : $\left(\underset{P}{x=1} \Rightarrow \underset{Q}{x^2=1} \right)$ Vraie

$\left(n \text{ pair} \Rightarrow n \text{ multiple de } 6 \right)$ Fausse

Équivalence : $\left(P \Rightarrow Q \text{ ET } Q \Rightarrow P \right)$

Notation $P \Leftrightarrow Q$

Ex : $\left(\underset{P}{ABC \text{ isocèle}} \Leftrightarrow \underset{Q}{ABC \text{ a deux côtés égaux}} \right)$ Vraie

$\left(\underset{P}{x=1} \Leftrightarrow \underset{Q}{x^2=1} \right)$ Fausse

$P \Rightarrow Q$
 $Q \not\Rightarrow P$

Comprendre ce qu'est une implication

⚠ Pas un "donc"

Pluie donc parapluie

Pluie $\Rightarrow$ Parapluie

P donc Q

$\underline{\underline{P}} \Rightarrow Q$

⚠ Pas de causalité

(Paris est en Fr $\Rightarrow$ 2 est pair) Vraie
P: V Q: V

Ce qu'est une équivalence

⚠ Pas un ET (MT pdt des USA $\Leftrightarrow$ MT reine d'Ang.) V
V si a=0 ou b=0 F sinon V si a=0 ou b=0 F sinon

a, b $\geq$ 0

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Taille de vérité de $P \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow Q$: "Si P vraie, alors Q vraie"

P: "Il pleut"

Q: "parapluie"

P	Q	$P \Rightarrow Q$	NON P	(NON P) ou Q
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$

(NON P) ou Q
par P P

⚠ Principe d'explosion
 P (faux) $\Rightarrow$

3 pair $\Rightarrow$ 2 pair ? Vraie
3 pair $\Rightarrow$ 5 pair ? Vraie

Négation de $P \Rightarrow Q$

$$\begin{aligned} P \Rightarrow Q &\iff Q \text{ ou } (\text{NON } P) \\ \text{NON}[P \Rightarrow Q] &\iff \text{NON}[\underbrace{Q}_{\text{NON } Q} \text{ ou } \underbrace{(\text{NON } P)}_{\text{NON}(\text{NON } P)}] \\ &\iff \text{NON } Q \text{ ET } \text{NON}(\text{NON } P) \\ &\iff \text{NON } Q \text{ ET } P \end{aligned}$$

$$\text{NON } P \not\Rightarrow \text{NON } Q$$

Exemple : " Il pleut, je prends mon parapluie "

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_P \qquad \underbrace{\hspace{2.5cm}}_Q$

$P \text{ ET NON } Q \iff \text{Il pleut ET je ne prends pas mon parapluie}$

Réciproque de $P \Rightarrow Q$: $Q \Rightarrow P$ $ABC \text{ rect } A \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

Ex : Réciproque du thm. de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow ABC \text{ rect. en } A$
 $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ $x^2 = 1 \not\Rightarrow x = 1$

Contraposée de $P \Rightarrow Q$: $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$

Ex : $P \Rightarrow Q$: "S'il pleut, le sol est mouillé"

$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$: "Si le sol est sec, alors il ne pleut pas"

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{P \Rightarrow Q}_{(\text{non } P) \text{ ou } Q} & \Leftrightarrow & \underbrace{\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P}_{\text{non}(\text{non } Q) \text{ ou } \text{non } P} \\ & & \underbrace{Q \text{ ou } \text{non } P} \end{array}$$

Conditions nécessaires et suffisantes

Q est nécessaire à P si :

$$P \Rightarrow Q$$

diag. Q

"P seulement si Q"

Q est suffisante à P si :

$$Q \Rightarrow P$$

"P si Q"
"Si Q, alors P"

Q est nécessaire et suffisante à P si :

$$P \Leftrightarrow Q$$

"P si et seulement si Q"

À vous de jouer !

① Négation, contraposée, réciproque de :

" Si je regarde Martin Trausard, alors je serai prêt pour la prépa "

" n pair $\Rightarrow n^2$ pair "

" Si tu veux la paix, prépare la guerre "

" (u_n) croissante et majorée $\Rightarrow (u_n)$ converge "

À vous de jouer!

$$P \Rightarrow Q$$

Q ou non P

equivalents?

2

Table de vérité de :

[illegible]

