

Théorie des ensembles

Les bases

Ensemble : Collection d'objets distincts

Appartenance $a \in E$ ou $a \notin E$
 a est un élément de E

Notation : $E, F, \dots$ $A, B, C, \dots$

Définition d'un ensemble : $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ $\{1, 2\}$
l'ensemble contenant $\{ \pi \}$

Cas particuliers :

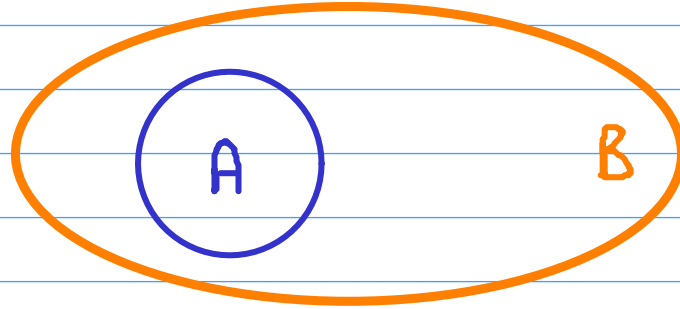
$\emptyset$: ensemble vide

$\{a\}$: singleton

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
 $\mathbb{C}$

Sous-ensemble : Tous les éléments de A sont dans B
(partie)

$A \subset B$
est inclus
dans



Ensemble des parties : $\mathcal{P}(A)$

Exemple : $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

$$= \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

Égalité : $A \overset{=}{=} B \iff \underline{A \subset B} \text{ et } \underline{B \subset A}$

Montrer une inclusion $A \subset B$

Soit $x \in A$ (raisonn.) $x \in B$ donc $A \subset B$

Exemple : On sait que $\underline{A \subset B}$ et $\underline{B \subset C}$, montrez que $A \subset C$

Sei $x \in A$

Or $A \subset B$, donc $x \in B$

On $B \subset C$, donc $x \in C$

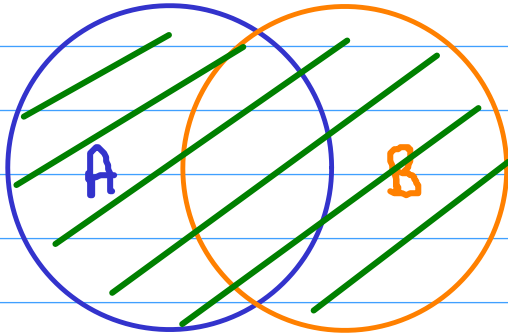
Donc $x \in C$, donc $A \subset C$

Montrer une égalité $A=B$

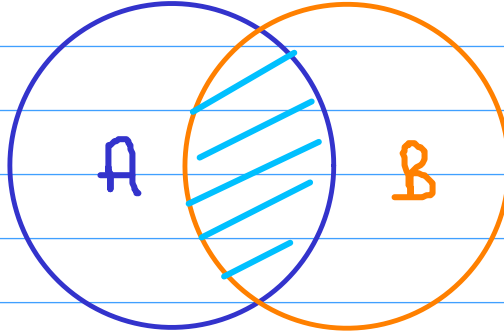
① Montrer $A \subset B$

② Montrer $B \subset A$

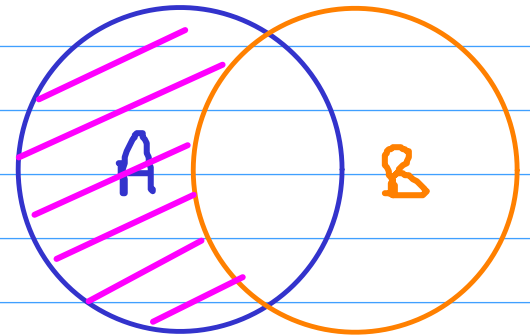
Opérations



Union
 $A \cup B$



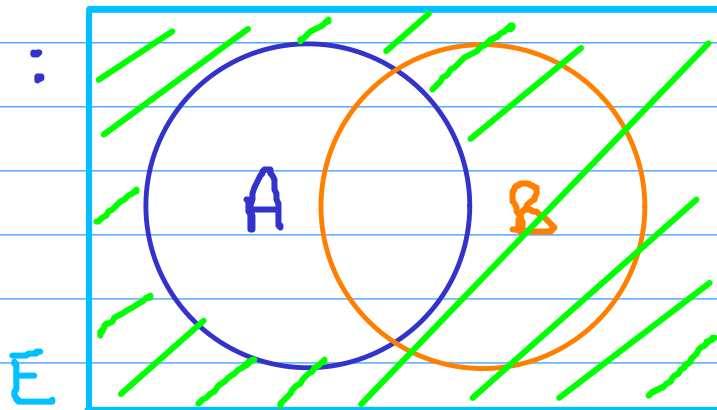
Intersection
 $A \cap B$
inter



Différence
 $A \setminus B$
privé de
moins

Complémentaire :

$$\bar{A} = E \setminus A$$



Lien propositions - ensembles

ET

$$\begin{aligned} A \subset B &\iff x \in A \implies x \in B \\ B \subset A &\iff x \in B \implies x \in A \\ A = B &\iff x \in A \iff x \in B \end{aligned}$$

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ ET } x \in B$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ OU } x \in B$$

$$x \in \overline{A} \iff \text{NON}(x \in A)$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ ET NON}(x \in B)$$

$$1 + (2+3) = (1+2) + 3$$

Règles de calcul :

Associativité :

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C & P \text{ ET } (Q \text{ ET } R) &\Leftrightarrow (P \text{ ET } Q) \text{ ET } R \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C & \text{OU} \end{aligned}$$

Commutativité :

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A & P \text{ ET } Q &\Leftrightarrow Q \text{ ET } P \\ A \cup B &= B \cup A & \text{OU} \end{aligned}$$

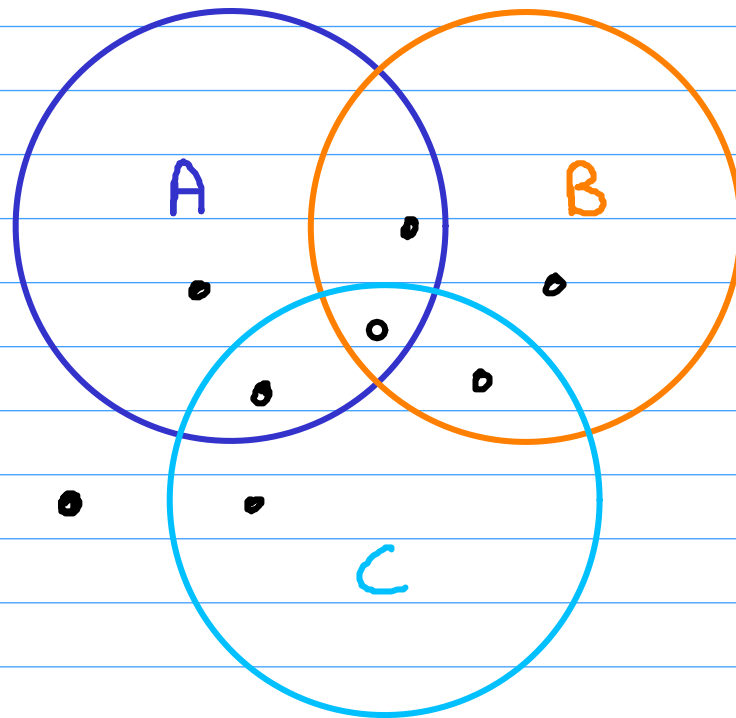
Distributivité :

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Complémentaire :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A & \text{NON}(\text{NON } P) &\Leftrightarrow P \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} & \text{NON}(P \text{ ET } Q) &\Leftrightarrow \text{NON } P \text{ OU } \text{NON } Q \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} & \text{ET} & \text{OU} \end{aligned}$$

Visualiser les ensembles



$$A \cap \underline{B \cup C} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

À vous de jouer !

① Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

a) à l'aide d'une double-inclusion

b) à l'aide d'un raisonnement sur les propositions

① $M_q \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
Soit $x \in \overline{A \cup B}, \dots$

② $M_q \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$
Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}, \dots$

$P: "x \in A"$ et $Q: "x \in B"$
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow$ $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow$

② Montrer que :

a) Si $\overline{A \cup B} \stackrel{H}{=} \overline{A \cap B}$, alors $\underline{A = B}$

b) Si $\underline{A \cup B = A \cup C}$ et $\underline{A \cap B = A \cap C}$, alors $\underline{B = C}$
H /

① Soit $x \in A, \dots$

② Soit $x \in B, \dots$

① Soit $x \in B, \dots$

② Soit $x \in C, \dots$