

Théorie des ensembles

Les bases (Exercices)

① Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

a) à l'aide d'une double-inclusion

($\subset$) Soit $x \in \overline{A \cup B}$, $x \notin A \cup B$ et donc $x \notin A$ (sinon $x \in A \cup B$)
 $x \notin B$ (sinon $x \in A \cup B$)
donc $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$
$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

($\supset$) Soit $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$

Si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, alors
donc $x \notin \overline{A \cup B}$

donc $x \in \overline{A \cup B}$ donc $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

① Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b) à l'aide d'un raisonnement sur les propositions $P: "x \in A"$ et $Q: "x \in B"$

$$\begin{aligned} \underline{x \in \overline{A \cup B}} &\iff \text{NON} (x \in A \cup B) \\ &\iff \text{NON} \left(\underbrace{x \in A}_P \text{ ou } \underbrace{x \in B}_Q \right) \\ &\iff \text{NON}(\underbrace{x \in A}_P) \text{ ET } \text{NON}(\underbrace{x \in B}_Q) \\ &\iff x \in \bar{A}^P \text{ ET } x \in \bar{B}^Q \\ &\iff \underline{x \in \bar{A} \cap \bar{B}} \end{aligned}$$

② Montrer que :

a) Si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$
Hyp. V

$A \subset B$ Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ alors $x \in A \cap B$
donc $x \in A$ et $x \in B$
donc $x \in B$ donc $A \subset B$

$B \subset A$ Idem

Ccl $A = B$

② Montrer que :

b) Si $\underbrace{A \cup B = A \cup C}_{H1}$ et $\underbrace{A \cap B = A \cap C}_{H2}$, alors $\underline{B = C}$

$B \subset C$ Soit $x \in B$

- Si $x \in A$, $x \in A \cap B$, $x \in A \cap C$ ^(H2), $x \in C$ ✓
- Si $\underline{x \notin A}$, $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$ ^(H1), $\begin{cases} \cancel{x \in A} \\ x \in C \end{cases}$ ✓

alors $x \in C$ donc $B \subset C$

$C \subset B$ Idem

$C \supset B$ $B = C$

Exercice bonus (Différence symétrique)

On définit $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $A, B \subset E$

1) Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2) Montrer que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

3) Contre-exemple pour l'union? $A \cup (B \Delta C) \neq (A \cup B) \Delta (A \cup C)$

4) Résoudre (inconnue B): $A \Delta \underline{B} = \emptyset$ $A \Delta \underline{B} = E$

$$A \Delta \underline{B} = A \quad A \Delta \underline{B} = \bar{A}$$

Solution: martintroussard.fr