

Quantificateurs

Prédicat : Proposition dont la valeur de vérité dépend d'une / de plusieurs variable(s)

Exemple : " $x > 1$ " "ABC est rect."

Notation : $P(x)$ $P(x, y)$

"Pour tout $x \in E$, $P(x)$ est vraie"

$\forall x \in E, P(x)$

$P(x)$
" $\forall x \in \mathbb{R}, \underline{x > 1}$ " F

" $\forall x \in [4, 8[, \underline{x > 1}$ " V

"Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vraie"

$\exists x \in E : P(x)$

↑
tel que

" $\exists x \in \mathbb{R}, \underline{x > 1}$ " V

" $\exists x \in \mathbb{R}_-, \underline{x > 1}$ " F

" Il existe un unique $x \in E$, tel que $P(x)$ "

$$\exists! x \in E : P(x)$$

Example: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ " $\checkmark$

" $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ " F $x=0$

" $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ " $\checkmark$ $x=2$

" $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ " F $x=2$ $x=3$

⚠ Variables muettes

$$\sum_{k=0}^{10} k = \sum_{i=0}^{10} i$$

" $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}, \underline{x}^2 \geq 0$ " $\Leftrightarrow$ " $\forall \underline{y} \in \mathbb{R}, \underline{y}^2 \geq 0$ "
 $\forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow \forall t \in E, P(t)$

Négation d'un quantificateur

$$\underline{E = \{x_1, x_2, x_3\}}$$

$$\forall x \in E, P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \text{ ET } P(x_2) \text{ ET } P(x_3)$$

$$\exists x \in E : P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \text{ OU } P(x_2) \text{ OU } P(x_3)$$

Cas général

$$\text{NON} (\forall x \in E, P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E : \text{NON} (P(x))$$

$$\text{NON} (\exists x \in E : P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E, \text{NON} (P(x))$$

Exemple : " $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ "

$$\exists n \in \mathbb{N} : u_n < 0$$

" $\exists n \in \mathbb{N} : x_n < 0$ "

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \exists \\ \text{NON } P(x_1) \text{ OU } \text{NON } P(x_2) \text{ OU } \text{NON } P(x_3) \\ \uparrow \text{neg} \end{array}$$

$$\forall \text{ non " ET NON " } \downarrow \text{ neg } \text{ ET NON " ET NON "$$

Démonstrations et quantificateurs

$\forall x \in E, P(x)$

Montrer que c'est vrai : Cas général "Soit $x \in E, \dots, \text{donc } P(x)$ "

Montrer que c'est faux : Contre-ex
($\exists x \in E : \text{non } P(x)$)

"Soit $x = \dots$
alors $x \in E$
or non $P(x)$ "

$\exists x \in E : P(x)$

Montrer que c'est vrai : Exemple "Soit $x = \dots$
alors $x \in E$
et $P(x)$ "

Montrer que c'est faux : Cas général "Soit $x \in E, \dots, \text{donc non } P(x)$ "
($\forall x \in E, \text{non } P(x)$)

Enchaînement de quantificateurs

$$\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x}}}}} \quad u_n \leq M$$

$P(M)$

Exemples : (u_n) est majorée $\exists M \in \mathbb{R} : [\forall n \in \mathbb{N}, [u_n \leq M]]$

Antécédent par ln $\forall y \in \mathbb{R} [\exists x \in \mathbb{R}_+^* : [ln(x) = y]]$

Limite $\lim_{x \rightarrow a} f = l$ $\forall \varepsilon > 0, [\exists \eta > 0 : [\forall x \in \mathbb{R}, [|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon]]]$

def sur $\mathbb{R}$ cha $P(y)$ $Q(x)$ $R(x)$ $P(\varepsilon)$ $Q(\eta)$

⚠ Ordre des quantificateurs

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \geq y$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

on pose
Vrai ($\exists x : y = x - 1$)

$$\rightarrow x \geq y$$

$$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x \geq y$$

Faux ($\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : x < y$)

$$x = y - 1 = y$$

À vous de jouer ! ① Écrire à l'aide des quantificateurs :

"Entre deux réels distincts, il y a toujours un rationnel"

" f est constante"

f def. sur $\mathbb{R}$

"Un carré de réel est toujours positif"

En vous aidant de la négation :

Non

"Il n'existe pas d'entier plus grand que les autres"

" f n'est pas périodique"

" f ne prend jamais deux fois la même valeur"

② Traduire en français et nier :

a) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < M$

b) $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = u_n$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : f(x) = y$

d) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$

e) $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) > 0 \iff x < 0)$

f) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$

g) $\exists n \in \mathbb{N} : \left[\forall m \in \mathbb{N}, \left[\exists k \in \mathbb{Z} : \left[n = km \right] \right] \right]$

