

Raisonnements classiques

Preuves directes

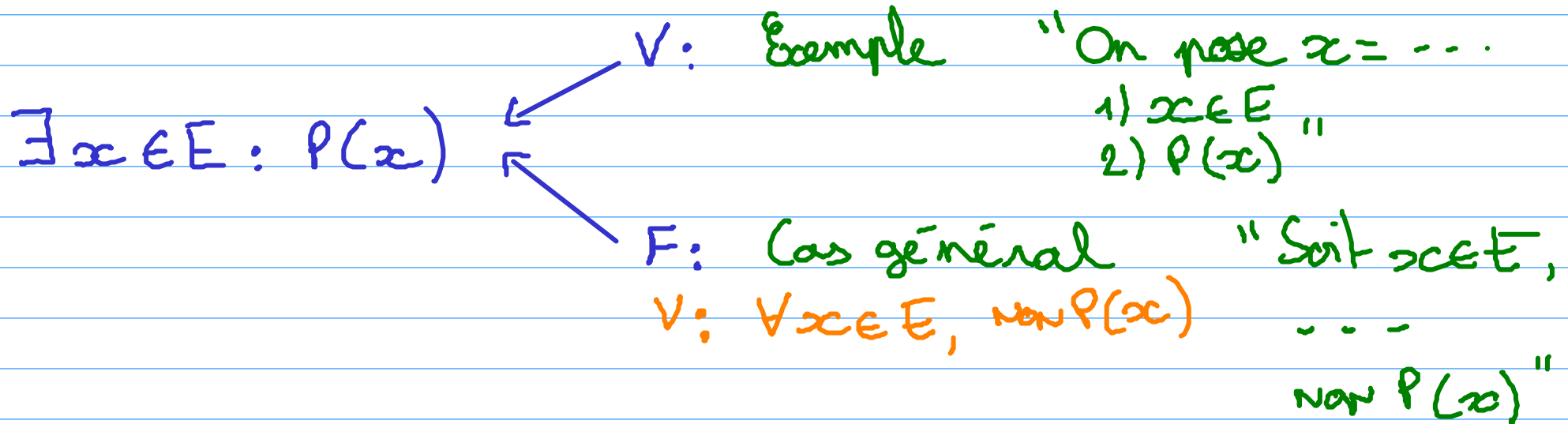
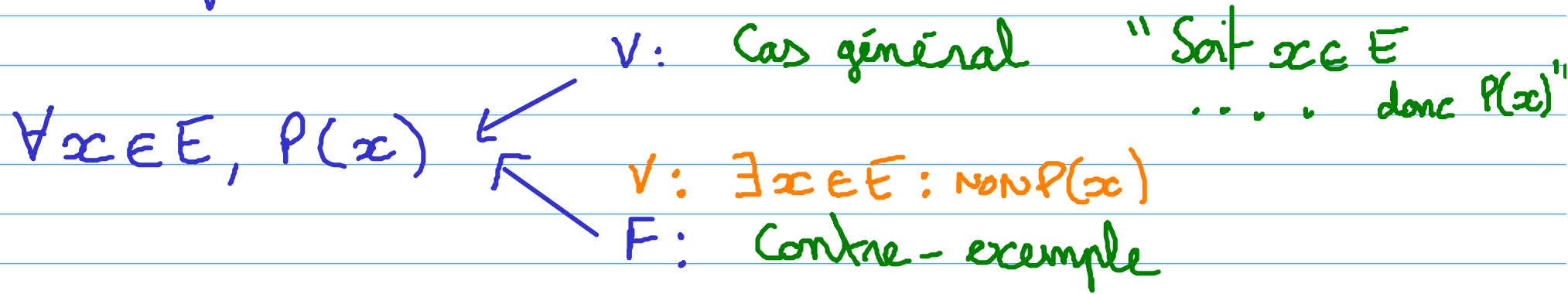
Montrer une implication $P \Rightarrow Q$

- 1) On suppose P
- 2) On montre Q

Montrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q : (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

- | | |
|------------------------------|-------------------|
| 1) Montrer $P \Rightarrow Q$ | 1) On suppose P |
| | 2) Montrer Q |
| 2) Montrer $Q \Rightarrow P$ | 1) suppose Q |
| | 2) Montrer P |

Quantificateurs



Disjonction de cas : Montrer " $\forall x \in E, P(x)$ " en séparant les cas selon les valeurs de x

Exemple : Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}, \frac{m(m+1)}{2} \in \mathbb{N}$

Cas 1 : m pair $\frac{m}{2} \in \mathbb{N}$ $\frac{m}{2} \times (m+1) \in \mathbb{N}$ ✓

Cas 2 : m impair $m+1$ pair $\frac{(m+1)}{2} \in \mathbb{N}$ $\frac{(m+1)}{2} \times m \in \mathbb{N}$ ✓



Cas 1 : $x > 1 \dots$ Cas 2 : $x \leq 2 \dots$

Parité, congruences

Valeurs absolues

$1 \dots 1$
Cas ≥ 0 Cas < 0

Positif, négatif

Inégalités

$x \in A / x \notin A$

Raisonnement par l'absurde : Montrer P en supposant-
non P et en aboutissant à une contradiction.

Exemple : Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

Supposons $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ $\exists a \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{3} = \frac{a}{10^m}$

alors $10^m = 3a$ donc $3 \mid 10^m$ absurde donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

 Définition négatives : "n'est pas", $\neq$, $\notin$

premier irrationnel infini unique

Raisonnement par contraposée : Montrer $P \Rightarrow Q$ en montrant l'implication équivalente $\text{Non } Q \Rightarrow \text{Non } P$

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$ $n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons n pair alors $n^2 = n \times n$ pair

Par contraposée, $n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$

⚠ Contraposée $\neq$ absurde (mais équivalent)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq n^2 impair

Supposons n pair, alors n^2 pair, absurde

À vous de jouer !

① Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

a) $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}, (x < a \Rightarrow x \leq b)) \Rightarrow (a \leq b)$

② Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tel que
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, c) \\ = \text{PGCD}(a, c) = 1 \end{cases}$$

Montrer que c est impair.

(ex: 3, 4, 5) $3^2 + 4^2 = 5^2$ $\text{PGCD}(3, 4, 5) = 1$

