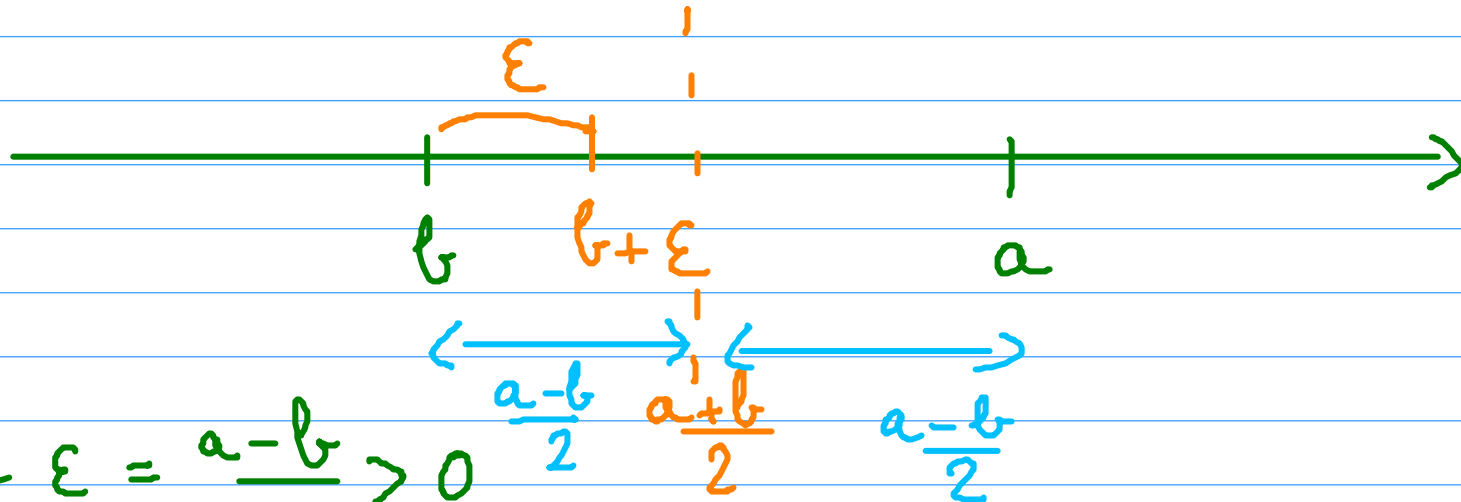


Raisonnements classiques (Exercices)

① Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$a) (\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$$

Contraposée $a > b \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0 : a \geq b + \varepsilon)$



On pose $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

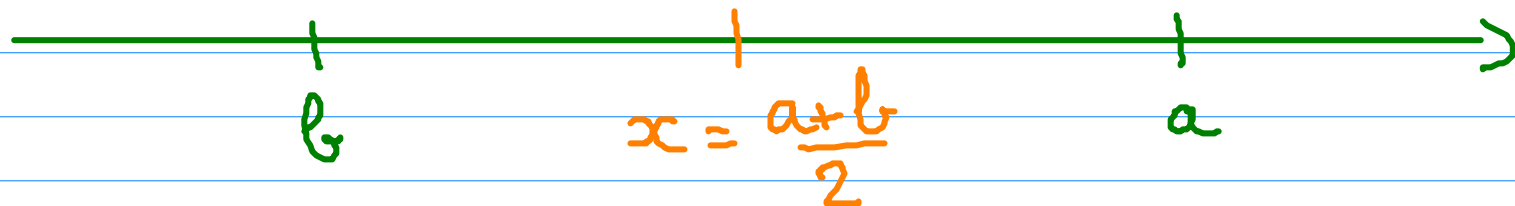
$$a \geq b + \varepsilon \quad \checkmark \quad \Leftrightarrow \quad a \geq b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2a \geq a+b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq b \quad \checkmark$$

Par contraposée ...

① Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$b) (\forall x \in \mathbb{R}, (x <^P a \Rightarrow x \leq^Q b)) \Rightarrow (a \leq b)$$

Contraposée : $(a > b) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : x < a \text{ ET } x > b)$



Supposons $a > b$

On pose $x = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{R}$

$$2b < a+b < 2a \Leftrightarrow b < \frac{a+b}{2} < a$$

Par contraposée, ...

② Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tel que $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ \text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, c) = \text{PGCD}(a, c) = 1 \end{cases}$
 Montrer que c est impair.

$$\text{PGCD}(a, b, c) = 1$$

Supp. c pair, $c = 2h$, $c^2 = 4h^2 \equiv 0 \pmod{4}$ c^2 pair

a^2 et b^2 ont la même parité $\left(\begin{array}{l} \text{Si } a^2, b^2 \text{ pairs ; } a, b \text{ pairs} \\ a^2 \text{ et } b^2 \text{ impairs} \end{array} \right)$
 a, b, c pairs absurde

a et b impaire

$$\begin{aligned} a &= 2m + 1 \\ b &= 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= 4m^2 + 4m + 1 \\ b^2 &= 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2 \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{absurde}$$

donc c est impair

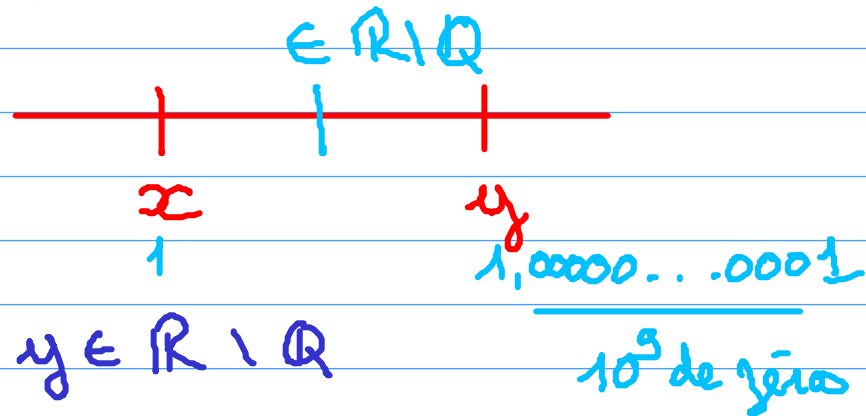
Exercice Bonus : Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Montrer que :

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, x + y \in \mathbb{Q}$

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

c) $\forall (x, n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{N}^*, \frac{x}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$



En déduire :

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : y \in [x, x + \varepsilon]$

Solutions : martintroussard.fr