

Raisonnement par analyse-synthèse

Principe : Pour trouver le(s) objet(s) qui vérifient une propriété, on raisonne en deux temps.

Trouver tous les $x \in E$ tq $P(x)$

① Analyse : On suppose trouvé un objet $x \in E$ qui vérifie $P(x)$

On détermine des conditions nécessaires vérifiées par x

$$\begin{array}{ccc} \text{équation} & \Rightarrow & x \geq 4 \\ P(x) & \Rightarrow & C_1(x) \text{ ET } C_2(x) \dots \end{array}$$

② Synthèse : On montre que tout x vérifiant les conditions vérifie aussi $P(x)$

$$C_1(x) \text{ ET } C_2(x) \dots \Rightarrow P(x)$$

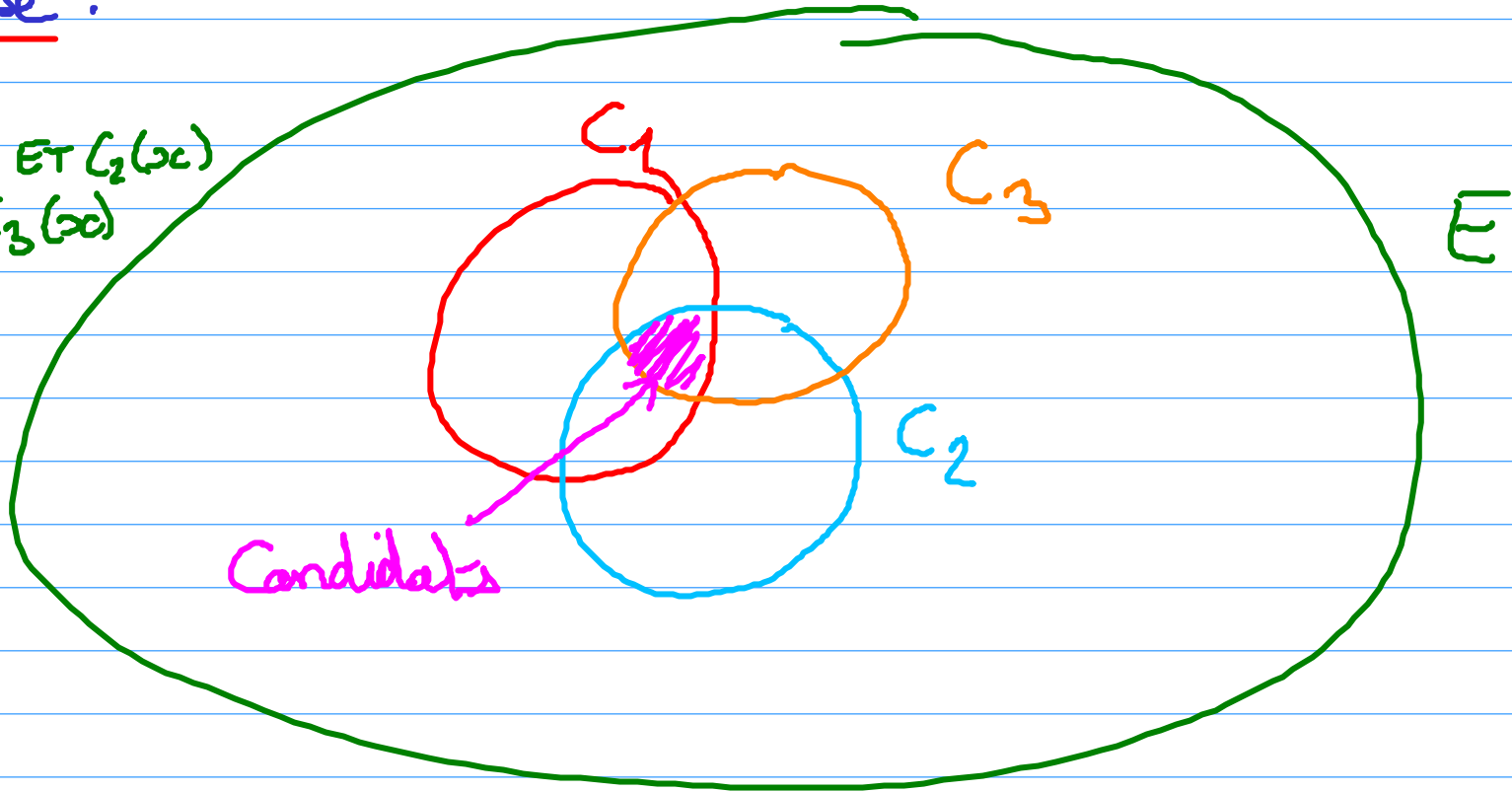
③ Conclusion $\{x \in E \mid P(x)\} = \{x \in E \mid C_1(x) \text{ ET } C_2(x) \dots\}$

Solutions ?

$x \in E, P(x) ?$

Analyse :

$P(x) \Rightarrow C_1(x) \text{ ET } C_2(x)$
ET $C_3(x)$



Synthèse : Vérifier que les candidats sont solutions

Exemple: Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables
telles que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ $P(f)$

Analyse: Supposons trouvée f

$$\rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow \underline{f(0) = 0} \quad (C1)$$

$$\rightarrow f(1+1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(2) = 2f(1)$$

$$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n f(1) \quad (C2)$$

$$\rightarrow \underline{\text{Soit } y \in \mathbb{R} \text{ (fixé)}} \quad g: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$g'(x) = f'(x+y) = f'(x) \quad x=0 \quad f'(y) = f'(0) \quad f' \text{ const.}$$

f linéaire

f affine $(C3)$

Exemple : Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables ✓
telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$

Synthèse : Soit f linéaire f dérivable

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$$

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y) \quad \checkmark$$

Conclusion : Solutions = Fct° linéaires

Quand utiliser l'analyse-synthèse ?

"Trouver tous les ... tels que ..."

Existence et unicité

Analyse : 1 candidat
Synthèse : vérif

Recherche des extrema

Analyse : $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{ \dots \}$
Synthèse : 1 par 1

Équations

Analyse : Se ramener à un cas simple
Synthèse : Vérifier !

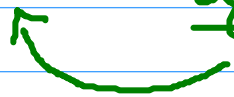
Décompositions

Pièges à éviter

- Ne pas être assez restrictif dans l'analyse

Exemple : Trouver f dérivable telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Analyse : $f(0) = 0$ Synthèse : ???



- Oublier la synthèse

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

Analyse : Si $\ln(x+1) = \ln(2x+3) \Leftrightarrow x+1 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -2$

Conclusion : La solution est ~~$x = -2$~~ $\ln(-1)??$

À vous de jouer!

① Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = x f(y) + y f(x)$$

② Résoudre :

$$\ln(x+3) = \ln(x+5) + \ln(x-2)$$