

Raisonnement par analyse-synthèse (Exercices)

① Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = xf(x) + yf(y)$

Analyse : Supposons trouvée f

$$x = y = 0 \quad f(0) = 0 \quad (C1)$$

$$x = y = 1 \quad f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \quad (C2)$$

$$x = y = -1 \quad f(1) = -f(-1) - f(-1) \\ 0 = -2f(-1) \\ f(-1) = 0 \quad (C3)$$

$$x = 2, y = \frac{1}{2} \quad f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2) \\ 0 = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2) \quad ?$$

$$\rightarrow x = 0, y? \quad \begin{cases} f(0) = yf(y) \\ 0 = yf(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \Rightarrow f(y) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow f(y) = 0 \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 0$$

f est la fct^e nulle

Synthèse : $f: x \mapsto 0$
solution

② Résoudre : $\ln(x+3) = \ln(x+5) + \ln(x-2)$

Analyse : Supposons trouvé $x \in \mathbb{R}$ solution $P(x)$

$$\begin{aligned}\ln(x+3) = \ln(x+5) + \ln(x-2) &= \ln[(x+5)(x-2)] \\ &= \ln(x^2 + 3x - 10)\end{aligned}$$

$$x+3 = x^2 + 3x - 10 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 13 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-2 - \sqrt{56}}{2}, \frac{-2 + \sqrt{56}}{2} \right\}$$

$$\Delta = 4 - 4 \times (-13) = 56 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ -1 - \sqrt{14}, -1 + \sqrt{14} \right\}$$

$$\sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\sqrt{14} \approx 3,7$$

Condition

Synthèse : Si $x = -1 - \sqrt{14} \approx -4,7$ ✗ $\ln(x-2)$ n'existe pas

$$\text{Si } x = -1 + \sqrt{14} \approx 2,7 \quad \checkmark$$

Conclusion : 1 solution

Exercice bonus

(fixé)

Montrer que toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Analyse : Supposons trouvées p et i tq
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = p(x) \\ \text{"} , i(-x) = -i(x) \\ \text{"} , f(x) = p(x) + i(x) \end{cases}$$

On a donc $p(x) = \dots$ et $i(x) = \dots$

Solutions : martintroussard.fr