

Gommes

Somme: $a_1 + \dots + a_m = \sum_{k=1}^m a_k$

1 $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$ 2 $\sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2$

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{i=1}^m a_i$$

Variable muette

Réurrence: $\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^m a_k \right) + a_{m+1}$

Indexation d'une somme: $(p, q \in \mathbb{N})$

$$\sum_{k=p}^q a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } q < p \\ a_p & \text{si } q = p \\ a_p + \dots + a_q & \text{si } q > p \end{cases}$$

Avec un ensemble
 $E = \{1, 14, 16\}$

$$\sum_{k \in E} k^2 = 1^2 + 14^2 + 16^2$$

$\Delta = 0$
 for k in ...:
 $\Delta += \dots$

Opérations sur les sommes

Linéarité

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)$
 $=$
 $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$

$$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$$

$\lambda a_1 + \lambda a_2$
 $=$
 $\lambda (a_1 + a_2)$

Preuve $\text{I} (n=1)$

$$\sum_{k=1}^1 (a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^1 a_k + \sum_{k=1}^1 b_k$$

H: $\sum_{k=1}^{n+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) + (a_{n+1} + b_{n+1})$

$\downarrow \text{H Réc.}$

$$= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k + a_{n+1} + b_{n+1} \quad \checkmark$$

Regroupement :
$$\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^m a_k = \sum_{k=1}^m a_k$$

$(a_1 + a_2)$
 $+$
 $(a_3 + a_4 + a_5)$

Séparation :
$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=1}^q a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$$

$a_3 + a_4 + a_5$
 $=$
 $(a_1 + \dots + a_5) - (a_1 + a_2)$

Inversion :
$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m a_{m-k+1}$$

$a_1 + a_2 + a_3$
 $=$
 $a_{3-1+1} + a_{3-2+1} + a_{3-3+1}$
 $a_3 + a_2 + a_1$

Translation :
$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{k+p}$$

$a_4 + a_5 + a_6$
 $=$
 $a_{4+0} + a_{4+1} + a_{4+2}$

⚠ Visualiser sur des cas simples!

Sommes particulières

Premiers entiers

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Série géométrique

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

→ Réurrence

Factorisation FONDAMENTALE ($m \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a^m - b^m &= (a-b) \left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-2}a + b^{m-1} \right) \\ &= (a-b) \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k-1} \right) \end{aligned}$$

Preuve

$$\begin{aligned} (a-b) \left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k-1} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} a^{k+1} b^{m-k-1} - \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\textcircled{m}} a^k b^{m-k} - \sum_{k=\textcircled{0}}^{m-1} a^k b^{m-k} \\ &= a^m - b^m \quad \checkmark \end{aligned}$$

À vous de jouer!

① Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^n \frac{4^{k+1}}{3^{k-1}}$$

$$\sum_{k=1}^n 3^k$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n 2^k x^k$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k x^{n-k}$$

② Soit $n \geq 2$ et $a \geq 2$ des entiers. Montrer que :

a) Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$

b) Si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier

c) Si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2