

Sommes (Exercices)

① Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^n \frac{4^{k+1}}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^n \frac{4 \times 4^k}{\frac{1}{3} \times 3^k} = 12 \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{3}\right)^k = 12 \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{3}} = 36 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$\sum_{k=1}^n 3k = 3 \sum_{k=1}^n k = 3 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) \quad n=3 \quad \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\textcircled{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\textcircled{2}} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\textcircled{1}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0$$

$\uparrow$
 $n, n-1, \dots, 1$

$$\sum_{k=1}^n 2^k x^k = \sum_{k=1}^n (2x)^k = \begin{cases} 2x \times \frac{1-(2x)^n}{1-2x} & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ n & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k x^{n-k} = (x^{\underline{n}} + 2x^{n-1} + \dots + 2^{n-1}x + 2^n) \quad \begin{matrix} a=x \\ b=2 \\ n \leq n+1 \end{matrix}$$

$$a^n - b^n = \underline{(a-b)} (a^{\underline{n-1}} + a^{n-2}b + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= \begin{cases} n2^n & \text{si } x=2 \\ \frac{x^{n+1} - 2^{n+1}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$$

② Soit $n \geq 2$ et $a \geq 2$ des entiers. Montrer que :

a) Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$

$$a^n - 1 = \underline{(a-1)} (a^{n-1} + \dots + a + 1)$$

Contr: Si $a \neq 2$, alors $a^n - 1$ n'est pas premier
($a \geq 3$)

$$a-1 \mid a^n - 1$$

• $a \neq 2$, donc $a-1 \neq \underline{1}$

• $a \geq 3$ et $n \geq 2$ donc $a^n > a$ donc $a-1 \neq \underline{a^n - 1}$

$a^n - 1$ pas premier

b) Si $2^m - 1$ est premier, alors m est premier

$\subseteq$: Si m pas premier, alors $2^m - 1$ pas premier

Supp. $m = ab$ où $\begin{cases} 2 \leq a \leq m-1 \\ 2 \leq b \leq m-1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2^m - 1 &= 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 \\ &= \underline{(2^a - 1)} \left((2^a)^{b-1} + \dots + (2^a) + 1 \right) \end{aligned}$$

- $2^a - 1 \neq 1$ car $a \geq 2$
 - $2^a - 1 \neq 2^m - 1$ car $a \neq m$
- } $2^m - 1$ pas premier

c) Si $2^m + 1$ est premier, alors m est une puissance de 2

$\subseteq$: Si m pas une puiss. de 2, alors $2^m + 1$ pas 1^{er}

$$\begin{aligned} a^m + b^m &= a^m - (-b)^m && \text{si } m \text{ impair} \\ &= (a - (-b)) (a^{m-1} + a^{m-2}(-b) + \dots + a(-b)^{m-2} + (-b)^{m-1}) \end{aligned}$$

Supposons $m = a \times b$ où $a \geq 3$ impair, $b \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 2^m + 1 &= 2^{ab} + 1 = (2^b)^a - (-1)^a \\ &= \underline{(2^b + 1)} \left((2^b)^{a-1} - (2^b)^{a-2} + \dots - (2^b) + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2^b + 1 &\neq 1 && \bullet \quad 2^b + 1 \neq 2^m + 1 && 2^{m+1} \text{ pas premier} \end{aligned}$$

Exercice bonus

Soit $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que :

$$\underline{\sum_{k=1}^n x_k = n} \quad \text{et} \quad \underline{\sum_{k=1}^n x_k^2 = n}$$

Montrer que $x_1 = \dots = x_n = 1$

Solution : martinbroussard.fr