

Produits

Produit : $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \prod_{k=1}^n a_k$

Réurrence : $\prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \times a_{n+1}$

Lien avec les sommes : $\rightarrow$ Variables muettes

$\rightarrow$ Indexation $\prod_{k=0}^5 k$ $\prod_{k \in E} a_k$

$\rightarrow$ ~~linéarité~~ $\prod (a_k + b_k) \neq (\prod a_k) + (\prod b_k)$
 $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \neq (a_1 a_2) + (b_1 b_2)$



Opérations sur les produits

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n (\lambda a_k) &= \lambda a_1 \times \lambda a_2 \times \dots \times \lambda a_n \\ &= \lambda^n \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n (a_k \times b_k) &= a_1 \times b_1 \times a_2 \times b_2 \times \dots \times a_n \times b_n \\ &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n a_k^m &= a_1^m \times a_2^m \times \dots \times a_n^m \\ &= \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^m\end{aligned}$$

Regroupement : $\left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=n+1}^m a_k \right) = \prod_{k=1}^m a_k$

$(a_1 \times a_2 \times a_3) \times (a_4 \times a_5) = (a_1 \times \dots \times a_5)$

Séparation : $\prod_{k=p}^q a_k = \frac{\prod_{k=1}^q a_k}{\prod_{k=1}^{p-1} a_k}$

$a_3 \times a_4 = \frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4}{a_1 \times a_2}$

Inversion : $\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n a_{n-k+1}$

$a_1 \times a_2 \times a_3 = a_{4-1} \times a_{4-2} \times a_{4-3}$

Translation : $\prod_{k=p}^q a_k = \prod_{k=0}^{q-p} a_{k+p}$

$a_4 a_5 a_6 = a_{4+0} a_{4+1} a_{4+2}$

Produits remarquables

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} a_k = 1$$
$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = 1$$

$$\prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n$$

$$\prod_{k=1}^n k = n!$$

Factorielle

Exemple

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$$

$$\prod_{k=1}^n (2k+1) = \prod \text{impairs} = \frac{\text{Tous les entiers} \rightarrow 2n+1}{\text{Pairs} \rightarrow 2n+1 (2n)}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Passer d'un produit à une somme (et inversement)

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$2^{a+b} = 2^a \times 2^b$$

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) = \prod_{k=1}^n \exp(a_k)$$

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k)$$

Produits télescopiques

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\cancel{a_2} \times \cancel{a_3} \times \dots \times \cancel{a_m}}{a_1 \cancel{a_2} \cancel{a_3} \dots \cancel{a_{m-1}}} \times \frac{a_{m+1}}{\cancel{a_m}} = \frac{a_{m+1}}{a_1}$$

$$\frac{\prod_{k=2}^{m+1} a_k}{\prod_{k=1}^m a_k}$$

À vous de jouer!

Calculer les produits :

$$a) \prod_{k=1}^n \frac{4k}{k^2}$$

$$b) \prod_{k=1}^n (6k-3)$$

$$c) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$d) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$e) \prod_{k=1}^n \sqrt{k^2 + k}$$