

Polynômes

Fonction polynôme : $P: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + \underline{a_n} x^n$ ($a_n \neq 0$)

Vocabulaire : $a_0, \dots, a_n$: coefficients ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$)
 a_n : coeff. dominant $\underline{a}(x-x_1)(x-x_2)$
 n : degré $\deg(P) = n$

Exemple : $P: x \mapsto 3x^3 - 2x^2 + 5x + 2$ $\deg(P) = 3$

$Q: x \mapsto 4 = 4x^0$ $\deg(Q) = 0$

$R: x \mapsto 0$ $\deg(0) = -\infty$

$$0^0 = 1$$

Polynôme : Expression $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

$P(x) = x^2$ reels $P(x)$ $x \otimes x$	$P(A)$ matrices $P(A)$ $A \otimes A$	$P(f)$ functions $P(f)$ $f \otimes f = f \circ f$ composition
$a \leq b \iff a(x) \leq b(x) \iff \sum_{i=1}^m a_i(x) \leq \sum_{i=1}^m b_i(x)$	$A \leq B \iff A - B \text{ is positive semidefinite}$	$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ for all } x$

Operations : $Q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda P \quad (\lambda P)(x) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) x^k$$

⊕ $P+Q$ $(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k + \sum_{k=0}^m b_k x^k$

⊗ PQ $(PQ)(x) = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k \right)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

Propriétés du degré :

$\lambda \neq 0$

$$\deg(\lambda P) = \deg(P)$$

$$(\lambda P)(x) = \sum_{k=0}^m (\lambda a_k) x^k$$

$\lambda \neq 0 \quad a_m \neq 0$
 $\lambda a_m \neq 0$

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

m, n

$$(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^m (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=m+1}^m b_k x^k$$

$$(\underline{x^4 - 3x + 2}) + (\underline{-x^4 + 2x^3}) = 2x^3 - 3x + 2$$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$$(PQ)(x) = \left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^m b_k x^k \right) = \underline{a_m b_m} x^{m+m} + \dots$$

$\neq 0$

$\deg(PQ) = m+m$

Division et factorisation

n divise m

$$\exists k \in \mathbb{Z} : \\ m = kn$$

$$D \text{ divise } P \iff P(X) = D(X) \times Q(X)$$

Division euclidienne : $P(X) = D(X) \times Q(X) + \underline{R(X)}$
 $\deg R < \deg D$

Exemple : $4x^3 - 5x^2 - 3x + 2$ | $x^2 - x + 1$

$4x(x^2 - x + 1) \rightarrow \ominus 4x^3 - 4x^2 + 4x$ | $4x - 1$

$-x^2 - 7x + 2$

$-1(x^2 - x + 1) \rightarrow \ominus -x^2 + x - 1$ | $-8x + 3$

$$4x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = (x^2 - x + 1)(4x - 1) + (-8x + 3)$$

À vous de jouer !

① En raisonnant sur les degrés / coefficients :

a) Montrer qu'on ne peut trouver P tel que $P^2 = X(X^8 + 1)$

b) Trouver tous les P tels que $P^3 = X^2 P$

c) Trouver tous les P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

② Diviser :

a) $5X^4 - 7X^3 + X^2 - 9$ par $X^2 + 3X + 6$

b) X^4 par $X^3 - 3X^2 + X - 5$