

Polynômes : Racines et factorisation

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$a_k \in \mathbb{R}$
 $\in \mathbb{C}$

Racines d'un polynôme : $P(\lambda) = 0$

Factorisation : λ racine de P

$$P(x) = (x - \lambda) \underbrace{Q(x)}_{\deg P - 1}$$

Preuve : $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \cancel{a_0} + a_1 x + \dots + a_n x^n$

λ racine $0 = P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = \cancel{a_0} + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$

$$P(x) - \cancel{P(\lambda)} = \sum_{k=1}^n a_k (x^k - \lambda^k) = \sum_{k=1}^n \left[a_k \underbrace{(x - \lambda)}_{\text{Facteur commun}} \left[\sum_{\ell=0}^{k-1} x^\ell \lambda^{k-1-\ell} \right] \right]$$

$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + b^{m-1})$

Avec la division euclidienne

$$P(X) = \underbrace{(X-\lambda)}_{\text{diviseur}} Q(X) + \underbrace{R(X)}_{\text{constant}}$$

$\deg R < \deg \text{div.} (=1)$

λ racine $P(\lambda) = R(\lambda) = 0$ donc $R = 0$

$$P(X) = (X-\lambda) Q(X)$$

Multiplicité d'une racine

Plus grande puissance n telle que $(X-\lambda)^n \mid P$

Exemple : $(X-3)^4 (X+1) \underbrace{(X^2+1)}_{(X-i)(X+i)}$

Racines R : 3 (mult. 4)
-1 (mult. 1)
 $\mathbb{C}$: $\pm i$ (mult. 1)

Propriété fondamentale : Si $\deg(P) = m \in \mathbb{N}^*$,

P a au plus m racines (comptées avec multiplicité)

Preuve : Si P a $m+1$ racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$

$$P(x) = (x - \lambda_1) Q_1(x) \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad P(x) = (x - \lambda_1)^2 Q_2(x)$$

$$\longrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad P(\lambda_2) = 0 = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{Q_1(\lambda_2)}_{=0} \quad \lambda_2 \text{ racine de } Q_1$$

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) Q_2(x)$$

$$Q_1(x) = (x - \lambda_2) Q_2(x)$$

$$\dots \quad \deg = m \quad \underbrace{P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_{m+1})}_{\deg = m+1} \underbrace{Q_{m+1}(x)}_{\neq 0} \quad \text{absurde}$$



au plus

$$P(x) = x^2 + 1$$

pas de racine dans $\mathbb{R}$

Corollaire : Si P a une infinité de racines, $P = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Relations coefficients - racines

Second degré : $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}$

$$a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = aX^2 - \underbrace{a(\lambda_1 + \lambda_2)}_b X + \underbrace{a\lambda_1\lambda_2}_c$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$
 $\Sigma = 5 \quad \Pi = 6$

Généralisation : $P(X) = a(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_m)$

$$= a \left[\underbrace{X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2}_{\text{orange arrow}} \right] (X - \lambda_3) \cdots (X - \lambda_m)$$

$$P(X) = \underbrace{a}_a X^m - \underbrace{a(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m)}_{a_{m-1}} X^{m-1} + \cdots + \underbrace{(-1)^m \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m}_{a_0}$$

Soit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$

Prod. $\lambda_1 \cdots \lambda_m = (-1)^m \frac{a_0}{a_m}$

À vous de jouer !

① Factoriser ;

$$X^5 + 3X^4 - 22X^3 + 38X^2 - 27X + 7$$

② Déterminer la multiplicité de 1 dans :

$$X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$$

a) Factoriser par $(X-1)$

b) "

c) "

⋮

calculs!!