

Inégalité

Règles de base

$$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

Ajouter / soustraire :

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \leq b + c$$

$$\Leftrightarrow \quad a - c \leq b - c$$

Multiplier / diviser :

$$\text{Si } c > 0, \quad a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ca \leq cb$$

$$\text{Si } c < 0, \quad a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ca \geq cb$$

Valable pour : $\leq, \geq, <, >$

Fonctions

si f est str. croissante $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
— décroissante $a \leq b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Applications

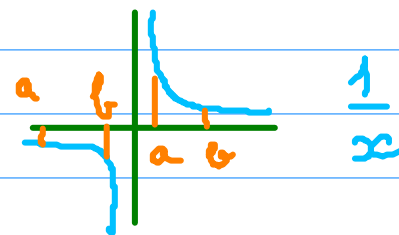
$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^2 \leq b^2 & \text{si } a \geq 0 \\ a^2 \geq b^2 & \text{si } b \leq 0 \\ ? & \text{si } b > 0 \text{ et } a \leq 0 \end{cases}$$

caré



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} & \text{si } ab > 0 \text{ (m\u00eame signe)} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} & \text{si } a < 0, b > 0 \end{cases}$$

inv.



Combiner des inégalités

Transitivité $a \leq b$ et $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(Mise) $a \leq b$ et $b < c \Rightarrow a < c$

Addition $\underline{a} \leq \underline{b}$ et $\underline{c} \leq \underline{d} \Rightarrow \underline{a+c} \leq b+c \leq \underline{b+d}$

Produit $\underline{\underline{0}} \leq a \leq b$ et $\underline{\underline{0}} \leq c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$

$$a \leq b \underset{c \geq 0}{\Rightarrow} ac \leq bc \qquad c \leq d \underset{b \geq 0}{\Rightarrow} bc \leq bd \qquad ac \leq bd$$

Généralisation $a_i \leq b_i$ $\sum_{k=0}^n a_i \leq \sum_{k=0}^n b_i$

$$0 \leq a_i \leq b_i$$

$$\prod_{k=0}^n a_i \leq \prod_{k=0}^n b_i$$

Réduction à 0 $a > b \iff a - b > 0$ (Signe)

Tableau de signes : $\frac{1}{x+3} \leq 5 \iff \frac{1}{x+3} - 5 \leq 0 \iff \frac{-5x+14}{x+3} \leq 0$

Étude de fonction : $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \iff \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0$

$\frac{1 - x^2}{2} < -1 \iff x^2 > 4 \iff x \notin [-2, 2]$ $f(x)$

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \iff \cos x &= 1 \\ \iff x &= 0 \\ &(\text{sur } [-2, 2]) \end{aligned}$$

$$f' \text{ str } \nearrow \quad f'(0) = 0$$

x	-2	0	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘ o ↗		

$$f(x) \geq 0$$

Pièges à éviter

① Soustraire des inégalités

$$a \leq 3 \quad b \leq 1 \quad \not\Rightarrow \quad a - b \leq 2 \quad \begin{matrix} a - b = 3 \\ (a = 3, b = 0) \end{matrix}$$

$$\begin{array}{lll} a \leq b & c \leq d & \Rightarrow a - d \leq b - c \\ & -c \geq -d & -d \leq -c \end{array}$$

② Multiplier / diviser par une quantité de signe inconnue

$$(\cancel{x-1})(x+1) \geq (\cancel{x-1})(2x+1) \quad \not\Rightarrow \quad x+1 \geq 2x+1$$

signe?

$$\text{Disjonction de cas : } \begin{cases} x-1 = 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

À vous de jouer !

① Soit $a \in [-3; 5]$. Encadrer $\frac{a+3b}{b^2+1}$
 $b \in]2; 7[$

② Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

③ Montrer que $\forall x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$