Inégalités (Exercices)

① Soit $a \in [-3 ; 5]$. Encadrer $\dfrac{a+3b}{b^2+1} = (a+3b) \times \dfrac{1}{b^2+1}$
$b \in]2 ; 7[$

$$\underline{-3 \leq a \leq 5} \qquad\qquad 2 < b < 7$$

$(3>0)$ $\quad 6 < 3b < 21 \qquad\qquad 0 < 3 < a+3b < 26$

(carré str ↗ sur $\mathbb{R}_+$) $\qquad 4 < b^2 < 49$

$$5 < b^2+1 < 50$$

(inv str ↘ sur $\mathbb{R}_+^*$) $\qquad \dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{b^2+1} > \dfrac{1}{50} \qquad 0 < \dfrac{1}{50} < \dfrac{1}{b^2+1} < \dfrac{1}{5}$

(Produit) $\qquad \dfrac{3}{50} < \dfrac{a+3b}{b^2+1} < \dfrac{26}{5}$

$$\dfrac{9}{25} = \dfrac{18}{50} < \qquad < \dfrac{11}{5}$$

② Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \overbrace{\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}}^{②} \overbrace{\leq \frac{x+y}{2}}^{①}$

① $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \underset{\text{croiss. str } \sqrt{\cdot}}{\iff} xy \leq \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \iff 0 \leq \frac{x^2-2xy+y^2}{4}$

$\iff 0 \leq \frac{(x-y)^2}{4}$ vrai

② $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{y+x} = \frac{xy}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

$\frac{x+y}{2} \overset{①}{\geq} \sqrt{xy}$

inv str ↘ $\mathbb{R}_+^*$

$\frac{1}{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$

$\times\, xy > 0$

$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{xy}{\left(\frac{x+y}{2}\right)} \leq \frac{xy}{\sqrt{xy}} = \sqrt{xy}$

③ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ : \underbrace{x - \frac{x^2}{2} \leq \overbrace{\ln(1+x) \leq x}^{②}}_{①}$

$f : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{\overset{\geq 0}{x^2}}{\underset{\geq 1 > 0}{1+x}}$

$f'(x) \geq 0$

x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	

$f(x) \geq 0$

$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ ✓

$g : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{\overset{\geq 0}{x}}{\underset{> 0}{1+x}}$

$g'(x) \leq 0$

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	

$g(x) \leq 0$

$\ln(1+x) \leq x$ ✓

Exercice bonus

Montrer les inégalités suivantes :

① $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$ $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

② $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ $\quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Solutions : martinbroussard.fr