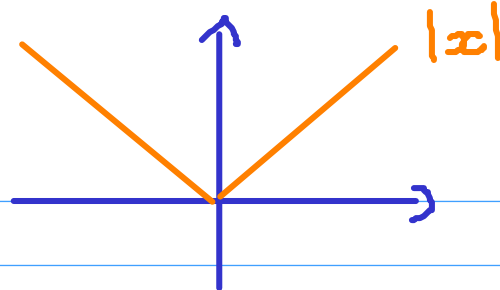


Valeur absolue, partie entière

Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$



Propriétés $|x| \geq 0$

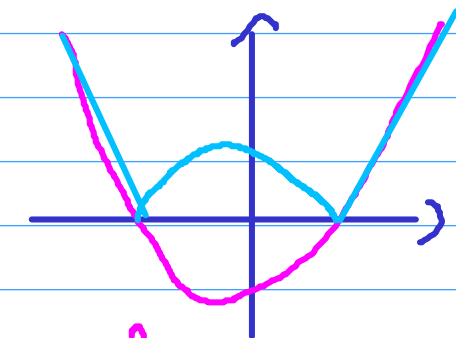
$$|x| = \max(x, -x)$$

$$|ab| = |a| |b|$$

$$|x^m| = |x|^m$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a| = \sqrt{a^2}$$



~~(x)^2~~

Preuve Disjonction de cas

	$b \geq 0$	$b < 0$
$a \geq 0$	$ a b = ab$ $ ab = ab$	$= a(-b)$ $ ab = -ab$
$a < 0$	$= (-a)b$ $ ab = -ab$	$= (-a)(-b)$ $ ab = ab$

Inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a|+|b|$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

Preuve $(|a+b|)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$$

$$|ab| \geq ab \quad 2|ab| \geq 2ab \quad (|a|+|b|)^2 \geq (a+b)^2$$

$\max(ab, -ab)$

?

$\hat{=}$ quand $ab \geq 0$
 a et b m. signe

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$

$\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}_+$

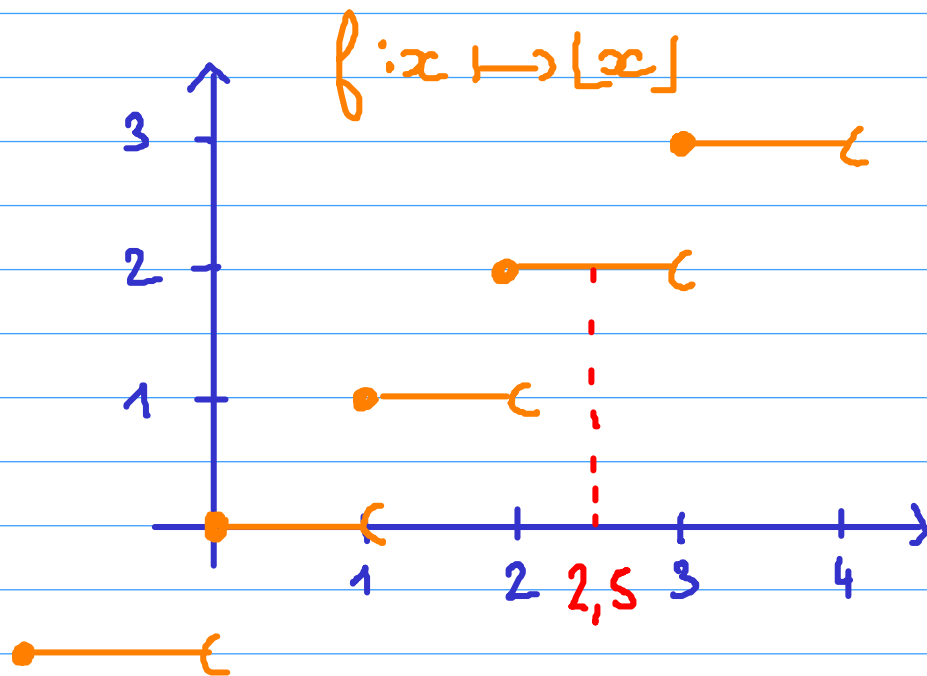
Autre formulation $||a|-|b|| \leq |a-b|$

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \leftarrow$$

$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |b|-|a| \leq |a-b| \leftarrow$$

$|a-b|$ $\max$

Partie entière $\lfloor x \rfloor$: plus grand entier inférieur ou égal à x



croissante

~~str.~~

$$a > b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \geq \lfloor b \rfloor$$

$$a > b \Rightarrow \cancel{\lfloor a \rfloor > \lfloor b \rfloor}$$

$$\lfloor a \rfloor > \lfloor b \rfloor \Rightarrow a > b$$

Exemple : $\forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor m \rfloor = m$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor -1,2 \rfloor = -2 \quad \triangle!$$

$$\lfloor x \rfloor : + \text{gd ent.} \leq x$$

Partie entière et inégalités

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \lfloor x \rfloor = k \iff k \leq x < k+1$$

neg. $x > k+1$

Conséquence $\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x}_{\text{encadre } \lfloor x \rfloor} < \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\text{encadre } x}$

Propriétés utiles $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \quad (\in \mathbb{Z})$$

$$\left. \begin{array}{l} \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \\ \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1 \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2}_{\downarrow \text{ vois. p.e.}}$$

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1}$$

À vous de jouer!

① Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

② Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x^2 + 2x - 5| + |x + 3| \leq |x - 4|$

③ Soit $m \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=1}^m \lfloor \sqrt{k} \rfloor$