

Inégalités classiques

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

Cas $n=2$ $\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

Cas $n=3$ $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

Cas général $\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

Cas d'égalité ($n=2$) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

(Général) $(a_1, \dots, a_n) = \lambda (b_1, \dots, b_n)$
prop.

Démonstration

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + \left(2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

≥ 0

$\Delta \leq 0$

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

$$\Delta \leq 0 \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

croissance de $\sqrt{}$
sur $\mathbb{R}_+$

$\Delta = 0$

$$\exists x \in \mathbb{R} : P(x) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i x + b_i = 0$$

a_i prop à b_i

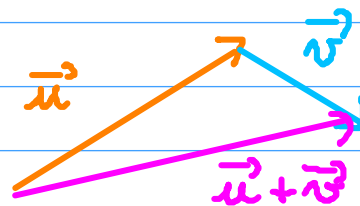
Inégalité triangulaire

Cas $n=1$ $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

Cas $n=2$ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$



$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Preuve $\Leftrightarrow (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \leq \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \cancel{b_1^2} + \cancel{b_2^2}$

$$\Leftrightarrow \cancel{a_1^2} + 2a_1b_1 + \cancel{b_1^2} + \cancel{a_2^2} + 2a_2b_2 + \cancel{b_2^2} \leq //$$

CS $\underline{a_1b_1 + a_2b_2} \leq \underline{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Inégalité des moyennes

$$x_1, \dots, x_n > 0$$

Cas $n = 2$

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}}_{\text{harmonique}} \leq \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{arithmétique}} \leq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{géométrique}}$$

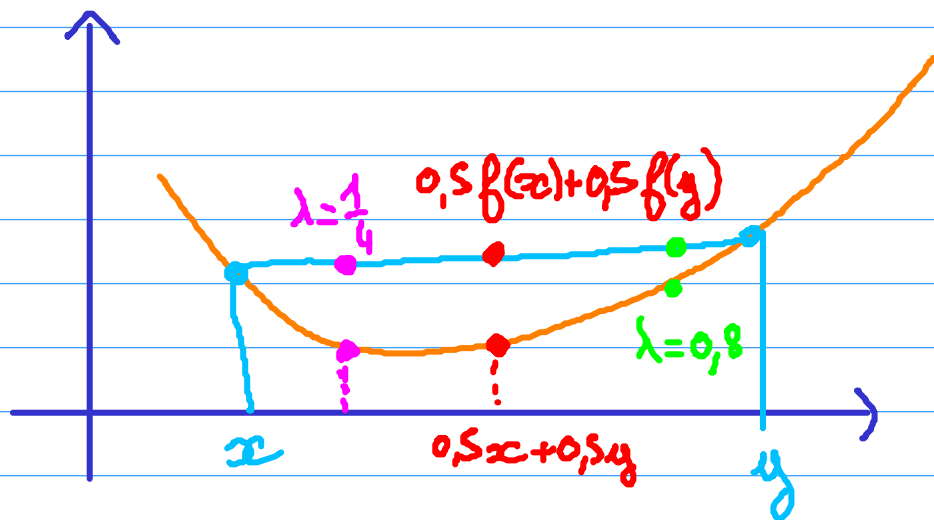
Cas général

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

Cas d'égalité

$$x_1 = \dots = x_n$$

Convexité $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$



$$\lambda = 0,5$$

$$f(0,5x + 0,5y) \leq 0,5f(x) + 0,5f(y)$$

Critères de convexité

f au dessus de ses tangentes

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$$

Inégalité de Jensen

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$$

$$\lambda_i > 0$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_m f(x_m)$$

À vous de jouer!

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1$$

① Soit $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$ tels que $x_1 + \dots + x_m = 1$

Montrer que $\sum_{k=1}^m \frac{1}{x_k} \geq m^2$ Cas d'égalité?

② Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $a + b + c = 1$

Montrer que $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$