Inégalités classiques (Exercices)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

① Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$

Cas d'égalité ?

$x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$

~~Convexité~~

$\begin{cases} f \text{ convexe} \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \end{cases}$ $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$

$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ $\qquad \dfrac{1}{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n} \leq \dfrac{\lambda_1}{x_1} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{x_n}$

~~Inégalité~~ triangulaire $\sqrt{\sum (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$

Moy. $\dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{=1} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

① Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$ Cas d'égalité ?

Cauchy-Schwarz $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$

$a_k = \sqrt{x_k}$

$b_k = \dfrac{1}{\sqrt{x_k}}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} 1\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

$$n \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ $\displaystyle n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$

② Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a+b+c=1$

Montrer que $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$

~~CS~~ ? $\quad \left|\sum a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum a_k^2}\sqrt{\sum b_k^2}$ $\quad \cancel{I}\ I$

$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}$

$a_1 = a+\frac{1}{a} \qquad a_2 = b+\frac{1}{b} \qquad a_3 = c+\frac{1}{c}$

$b_1 = a \qquad b_2 = b \qquad c_2 = c$ $\qquad$ ~~Mag.~~

Conv. $\quad f : x \longmapsto \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

$f'(x) = 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)$

$f''(x) = 2\left(1+\frac{3}{x^4}\right) \geq 0 \qquad f$ convexe

② Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $a+b+c=1$

Montrer que $1\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + 1\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + 1\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$ $f(?)$

$f : x \longmapsto \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $\quad \sum \lambda_i = 1$ $\quad f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c) \geq f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{1}\right)^2 = 3\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{3}$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

Exercices bonus

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que :

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (1+\lambda_k)\right]^{1/n} \geqslant 1 + \left[\prod_{k=1}^{n} \lambda_k\right]^{1/n}$$

Solutions : martintroussard.fr