

Trigonometrie : Produits, sommes, équations

Rappel : Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Transformation produit $\rightarrow$ somme

$$\sin a \cos b ?$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

Transformation somme-produit

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\end{aligned}$$

$$\cos a + \cos b = ?$$

$$\cos(\underbrace{x+y}_a) + \cos(\underbrace{x-y}_b) = 2 \cos x \cos y$$

$$\begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} \text{ et } y = \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a + \sin b ?$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

Transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ; v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$u^2 + v^2 = 1$$

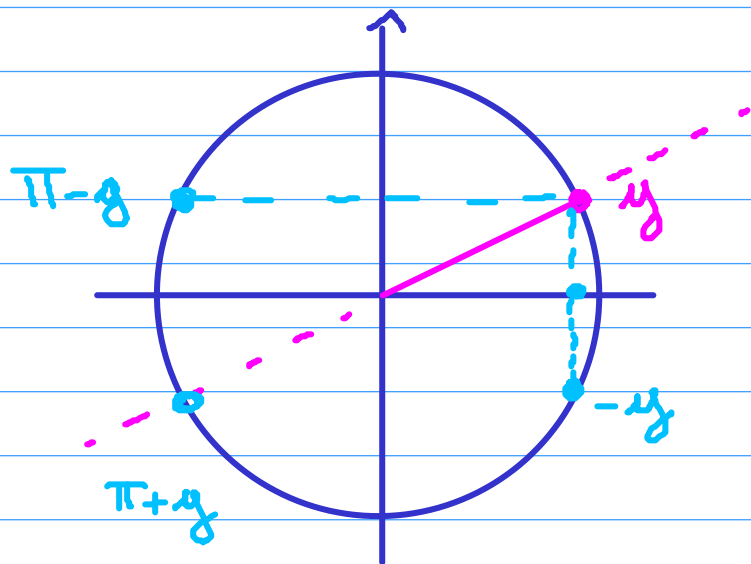
$$\exists \varphi \in \mathbb{R} : (u, v) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} a \cos x + b \sin x &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{Exemple : } \underbrace{1}_a \cos x + \underbrace{\sqrt{3}}_b \sin x = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

Équations trigonométriques



$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ x \equiv -y [2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ x \equiv \pi - y [2\pi] \end{cases}$$

$$\tan x = \tan y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv y [2\pi] \\ x \equiv \pi + y [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv y [\pi]$$

Example: $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ 2x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \frac{\pi}{6} [\pi] \\ x \equiv -\frac{\pi}{6} [\pi] \end{cases}$$

À vous de jouer !

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\cos x + \cos(4x) = 0$

b) $\cos(2x) + \sin(3x) = 0$

c) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$

② Déterminer la valeur maximale (éventuelle) atteinte par :

$$f: x \mapsto 3 \cos x - 2 \sin x$$