

Ordre dans  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}$

$E \subset \mathbb{R}$

$E$  partie de  $\mathbb{R}$

Majorant :  $M \in \mathbb{R}$  est un majorant de  $E \Leftrightarrow \forall x \in E, x \leq M$

Minorant :  $m \in \mathbb{R}$  est un minorant de  $E \Leftrightarrow \forall x \in E, x \geq m$

$E$  majorée  $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E, x \leq M$

minorée  $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : \quad \quad \quad , m \leq x$

$[1, 2]$  maj: ②, 3, 4, ...  
min: ①, 0, -1, ...

$\mathbb{R}_+$  maj: 0  
min: 0, -1, -2

Partie bornée : majoré et minoré  $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in E, |x| \leq C$

Maximum :  $M \in \mathbb{R}$  est le maximum de  $E \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ majorant de } E \\ M \in E \end{cases}$

Minimum :  $m \in \mathbb{R}$  est le minimum de  $E \Leftrightarrow \begin{cases} m \text{ minorant de } E \\ m \in E \end{cases}$

$]0, 1[$

min: 0, -1, -2, ...

maj: 1, 2, 3, 4, ...

$$(x, y) \in \mathbb{N}^2$$

$$x < y$$

$$x \leq y+1$$

$$\downarrow \Delta \in \mathbb{N}$$

Parties de  $\mathbb{N}$

Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément

cR  $]0, 1[$

et majorée

" grand "

Application : Principe de récurrence

$$\begin{cases} P(0) \text{ vraie} & (I) \\ \forall n \in \mathbb{N}, (P(n) \Rightarrow P(n+1)) & (H) \end{cases}$$

Supposons  $\exists k \in \mathbb{N} : \text{non } P(k)$

$E = \{ k \in \mathbb{N} \mid \text{non } P(k) \} \rightarrow \text{non vide} \rightarrow \text{plus petit élément } m_0 \in \mathbb{N}$

$P(m_0)$  fausse

$$m_0 \neq 0$$

(I)

$$m_0 \geq 1$$

$P(m_0 - 1)$  vraie (si non  $m_0 - 1 \in E$   
 $m_0$  pas le  $\oplus$  petit de  $E$ )

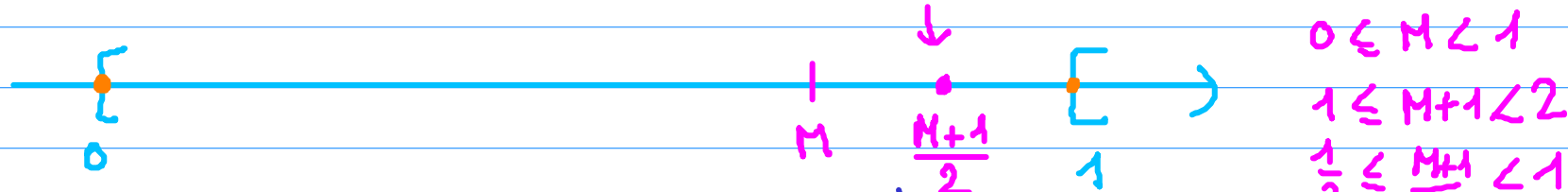
alors  $P(m_0)$  vraie absurde

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie}$$

## ⚠ Existence des extrema

Exemple :  $E = [0, 1[$  n'a pas de maximum

$$\text{non}(\exists M \in E : \forall x \in [0, 1[, x \leq M) \Leftrightarrow (\forall M \in E, \exists \underline{x} \in [0, 1[ : x > M)$$



Borne supérieure de  $E \subset \mathbb{R}$  : plus petit des majorants de  $E$   
inférieure " grand " mineurs "

Notation :  $\sup E$ ,  $\inf E$

Lien bornes-extrema

$$\begin{aligned} a = \min E &\Rightarrow a = \inf E \\ b = \max E &\Rightarrow b = \sup E \end{aligned}$$

Borne supérieure de  $E \subset \mathbb{R}$  : plus petit des majorants de  $E$   
majorant      plus petit  $\Rightarrow$  pas majorant

Réécriture :  $S = \sup E \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \leq S)$  ET  $(\forall S' < S, \exists x_0 \in E : x_0 > S')$

Exemple  $E = [0, 1[$        $\sup E = 1$  ?

①  $\forall x \in E, 0 \leq x < 1$  donc  $x \leq 1$

② Soit  $0 \leq S' < 1$  (si  $S' < 0, x_0 = 0 : x_0 > S'$ )

$$\text{Soit } x_0 = \frac{S' + 1}{2}$$

$$2 > S' + 1 > 2S'$$

$$1 > x_0 > S'$$



$$\exists x_0 \in E : x_0 > S'$$

## Propriété de la borne supérieure

Toute partie <sup>non vide</sup> majorée de  $\mathbb{R}$  possède une borne supérieure

minimale

inférieure

⚠ Résultat d'existence !

Propriété d'Archimède :  $\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N} : mx > y$

Preuve : Supp.  $\exists x > 0$  :  $\exists y \in \mathbb{R}$  :  $\forall m \in \mathbb{N}, mx \leq y$

$A = \{mx \mid m \in \mathbb{N}\}$  <sup>fixée</sup> majorée par  $y$   $\rightarrow$   $a = \sup A$  ) existence

$\forall m \in \mathbb{N}, mx \leq a \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \underline{(m+1)x \leq a}$   
 $\quad \quad \quad mx \leq \underline{a - x}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{majorant de } A \\ \oplus \text{ petit que } a \end{array} \right.$  absurde

À vous de jouer!

① Déterminer s'ils existent  $\min E$ ,  $\max E$ ,  $\inf E$ ,  $\sup E$

a)  $E = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq x^2 < 2\}$

b)  $E = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$

c)  $E = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \right\}$

② Soit  $E \subset \mathbb{R}$  non vide et majorée

Montrer que si  $\sup E > 0$ , alors  $E \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$

$\exists x \in E : x > 0$