

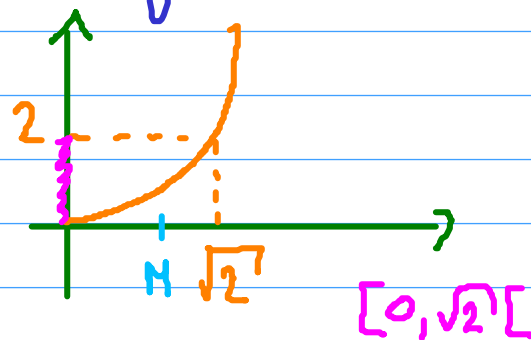
Ordre dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ (Exercices)

① Déterminer s'ils existent $\min E$, $\max E$, $\inf E$, $\sup E$

a) $E = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq x^2 < 2\}$

$E \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in E, x \geq 0$ 0 minimum

$0^2 = 0 \quad 0 \leq 0^2 < 2 \quad 0 \in E \quad \min E = 0$
 $\inf E = 0$



$\text{non}(\exists M \in E : \forall x \in E, x \leq M) \Leftrightarrow (\forall M \in E, \exists x_0 \in E : x_0 > M)$

Soit $M \in E$, on pose $x_0 = \frac{M + \sqrt{2}}{2}$ $x_0^2 = \frac{M^2 + 2M\sqrt{2} + 2}{4}$ $M < \sqrt{2} \quad M^2 < 2$
 $2M\sqrt{2} < 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$

$\sqrt{2} > M, \quad M + \sqrt{2} > 2M, \quad x_0 > M \quad x_0^2 < 2 \Rightarrow x_0 \in E$

Pas de max.

$\forall x \in E, x < \sqrt{2} \quad x^2 < 2$
 $x < \sqrt{2} \quad x^2 - 2 < 0 \quad (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) < 0$ $\sqrt{2}$ majore E
 Si $M < \sqrt{2}$, M ne majore pas E

$$b) E = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\} \quad 0 < \frac{1}{p} \leq 1 \quad 0 < \frac{1}{q} \leq 1$$

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 2 \quad 2 \text{ majore } E \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \quad \max E = 2$$

$$\sup E = 2$$

$$0 \text{ minore } E \quad 0 = \inf E \Leftrightarrow (\forall m > 0, \exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < m)$$

Soit $m > 0$

candidat $\oplus$
grand que 0

minore pas

$$\exists ? p : \frac{2}{p} < m ? \Leftrightarrow 2 < \frac{m}{p} \quad \text{Oui (Archimède)}$$

$p > 0 \in \mathbb{N}$

$$\exists p \in \mathbb{N}^* : \frac{2}{p} < m \quad m \text{ ne minore pas } E \quad \inf E = 0$$

E n'a pas de min $(E \text{ a un min} \Rightarrow \min = \inf \Rightarrow \min = 0 \text{ absurde})$

$$c) E = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \right\} \quad -1 \leq \frac{1}{p} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{1}{q} \leq 1$$

$$\underline{-2} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \underline{2}$$

$$\underline{p=1 \quad q=1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$$

$$\max E = 2 \Rightarrow \sup E = 2$$

$$\underline{p=q=-1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = -2$$

$$\min E = -2 \Rightarrow \inf E = -2$$

② Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée

Montrer que si $\sup E > 0$, alors $E \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$

$$\exists x \in E : x > 0$$

Supposons $\forall x \in E, x \leq \underline{0}$

0 majore E

$\sup E$ est le plus petit des majorants $\sup E \leq 0$

absurde

Exercice bonus

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ non vides et majorées.

Soit $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Solutions : martintraussard.fr