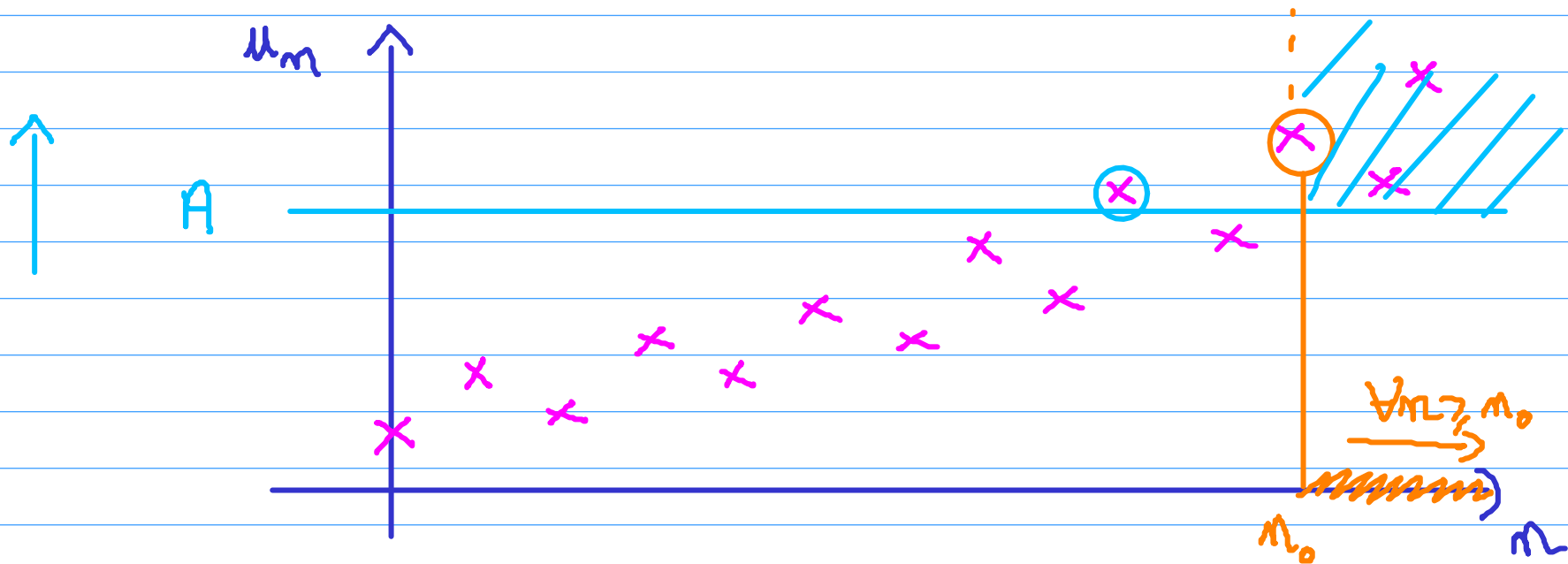


Limites et ε

à partir d'un
certain rang n_0

Limite $u_n \rightarrow +\infty$: $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, u_n > A$



Négation: $\exists A > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : u_n \leq A$

Limite $u_n \rightarrow -\infty$ $\Leftrightarrow (-u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

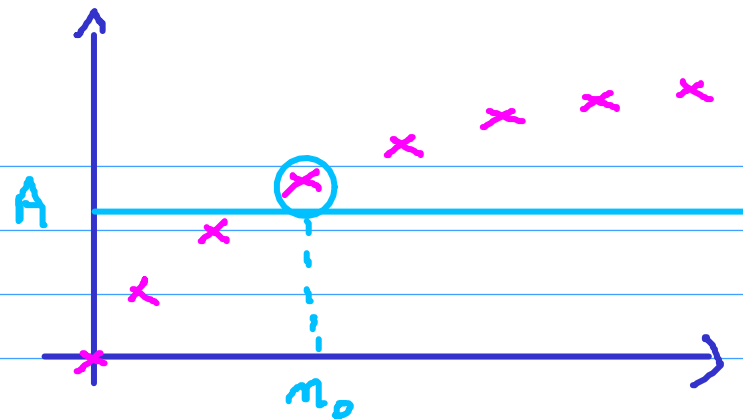
Exemple : $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$

$$\forall A > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_0, \sqrt{n} > A$$

$$\text{Soit } A > 0 \quad \sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$$

$$\text{On pose } m_0 = \lfloor A^2 \rfloor + 1$$

$$\forall n \geq m_0 > A^2, \sqrt{n} > A$$

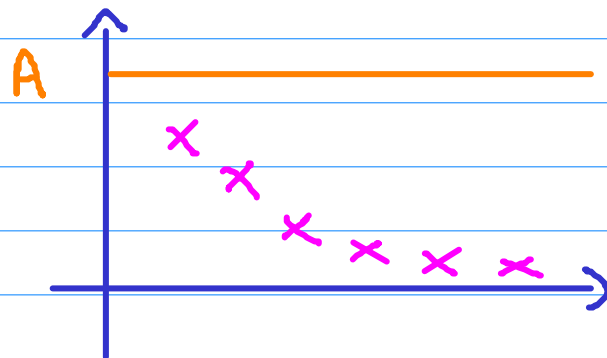


Contre-exemple : $\frac{1}{n} \not\rightarrow +\infty$

$$\exists A > 0 : \forall m_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq m_0 : \frac{1}{n} < A$$

$$\text{Soit } A = 10 \quad \text{Soit } m_0 \in \mathbb{N}, \frac{1}{m_0} < A$$

$(m = m_0)$



à partir d'un certain
rang n_0

Limite $u_n \rightarrow 0$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |u_n| < \varepsilon$
(précision) $u_n \in]-\varepsilon; \varepsilon[$



Limite $u_n \rightarrow l$: $(u_n - l) \rightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$

$u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

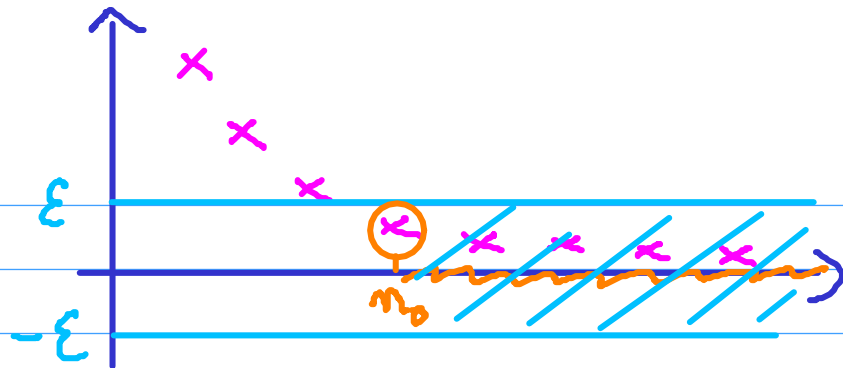
Example : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$ $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

On pose $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\forall n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}, \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$



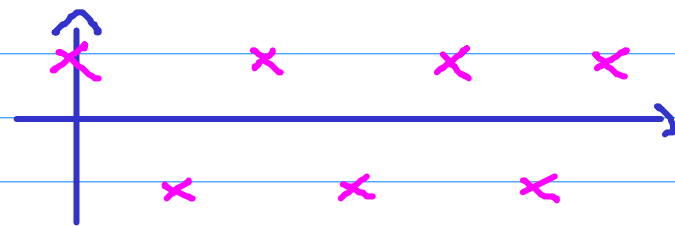
Contre-exemple : $\forall l \in \mathbb{R}, (-1)^n \not\rightarrow l$

$\forall l \in \mathbb{R}, |u_n - l| \geq |u_n| - |l| = |1 - |l||$

Si $l \notin \{-1, 1\}, |u_n - l| \geq \underbrace{|1 - |l||}_{> 0} > \underbrace{\frac{|1 - |l||}{2}}_{\varepsilon}$

Si $l = 1, |u_{2m+1} - l| = 2 > \underbrace{1}_{\varepsilon}$

Si $l = -1$, idem



Raisonnement théorique

$$\begin{array}{l} u_n \rightarrow l \\ v_n \rightarrow l' \end{array} \quad (u_n + v_n) \rightarrow l + l'$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1, |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n > n_2, |v_n - l'| < \varepsilon$$

$$|u_n + v_n - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq \underbrace{|u_n - l|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|v_n - l'|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_1, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_2, |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$ $\forall n > n_0, |u_n + v_n - (l + l')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

À vous de jouer !

① Montrer (formellement) que $\frac{(-1)^n}{n^2} \longrightarrow 0$

② Démontrer que :

a) Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$

b) Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow l$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$ ($l \in \mathbb{R}$)

c) Si $u_n \rightarrow l$ et $v_n \rightarrow l'$, alors $u_n v_n \rightarrow ll'$