

Limites et ε (Exercices)

① Montrer (formellement) que $\frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow 0$

$$-\frac{1}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| < \varepsilon$

précision à partir d'un certain rang n_0

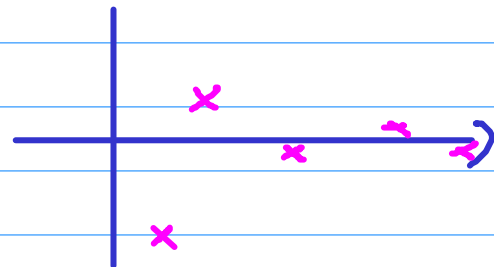
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Soit $\varepsilon > 0$

On pose $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$\forall n \geq n_0, n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ donc $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| < \varepsilon$



② Démontrer que :

a) Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$

$$\forall A > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, u_n > A$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2, v_n > A$$

$$n \geq n_1 \text{ et } n \geq n_2 \\ u_n + v_n > 2A$$

Soit $A > 0$

Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \underline{n_1}, u_n > \frac{A}{2}$

$n_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq \underline{n_2}, v_n > \frac{A}{2}$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$

$\forall n \geq n_0, u_n + v_n > A \quad \checkmark$

b) Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow l$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$ ($l \in \mathbb{R}$)

$$\underline{\forall A > 0, \exists m_1 \in \mathbb{N} : \forall n > m_1, u_n > A}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_2 \in \mathbb{N} : \forall n > m_2, |v_n - l| < \varepsilon$$

$$v_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\Rightarrow v_n > l - \varepsilon$$

$$\text{Si } n > \max(m_1, m_2), u_n + v_n > A + l - \varepsilon$$

$$\text{Soit } A > 0 \quad \varepsilon := 1 \quad \text{Soit } m_2 \in \mathbb{N} : \forall n > m_2, |v_n - l| < 1 \Rightarrow v_n > l - 1$$

$$A := A - (l - 1) \quad m_1 \in \mathbb{N} : \forall n > m_1, u_n > \underline{A - (l - 1)}$$

pour importer le signe

$$\text{On pose } m_0 = \max(m_1, m_2) \quad \forall n > m_0, u_n + v_n > A \quad \checkmark$$

c) Si $u_n \rightarrow l$ et $v_n \rightarrow l'$, alors $u_n v_n \rightarrow ll'$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1, |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n > n_2, |v_n - l'| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - l v_n + l v_n - ll'|$$

$$= |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \leq \underbrace{|v_n|}_{< M} |u_n - l| + |l| |v_n - l'|$$

$l \neq 0$ Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_2, |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2|l|} \Rightarrow |l| |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$v_n \in]l' - \frac{\varepsilon}{2|l|}, l' + \frac{\varepsilon}{2|l|}] \quad \underbrace{M = \max\left(|l' - \frac{\varepsilon}{2|l|}|, |l' + \frac{\varepsilon}{2|l|}|\right)}_{< M} \quad |v_n| < M$$

Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n > n_1, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow |v_n| |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$ $\forall n > n_0, |u_n v_n - ll'| < \varepsilon$ ✓

Exercice bonus

On suppose $u_n \rightarrow l$ et $v_n \rightarrow l'$ avec $l' \neq 0$

Montrer que $\left(\frac{u_n}{v_n} \right) \rightarrow \frac{l}{l'}$

$$\frac{|u_n - l|}{|v_n - l'|}$$

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{l}{l'} \right| = \dots$$

Solutions : martintraussard.fr