

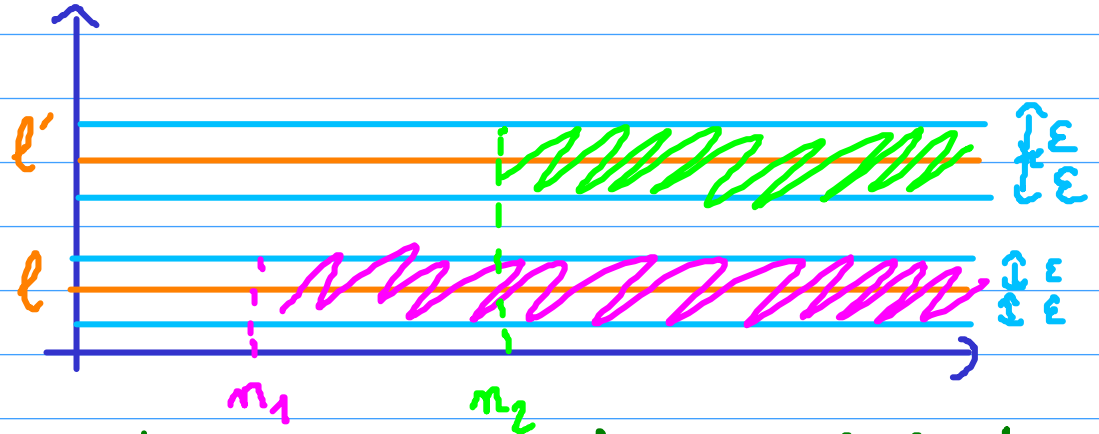
Convergence des suites

Unicité de la limite : Si $u_n \xrightarrow{(\in \mathbb{R})} l$ et $u_n \xrightarrow{(\in \mathbb{R})} l'$, alors $l = l'$

Preuve Supposons $l \neq l'$

On suppose $l < l'$

On pose $\varepsilon = \frac{l' - l}{4} > 0$



$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1, |u_n - l| < \varepsilon \quad u_n < l + \varepsilon = \frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l'$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2, |u_n - l'| < \varepsilon \quad u_n > l' - \varepsilon = \frac{3}{4}l' + \frac{1}{4}l$$

$$\text{On pose } n_0 = \max(n_1, n_2) \quad \frac{3}{4}l' + \frac{1}{4}l < u_n < \frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l'$$

$$\frac{1}{2}l' < \frac{1}{2}l$$

$$\underline{l' < l} \quad \text{absurde}$$

Mondotonicité et convergence: Toute suite croissante et majorée converge

Preuve Soit $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $l = \sup A$ $\exists M \in \mathbb{R}$
(A non vide, majoré) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$

Soit $\varepsilon < 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$ donc $u_n - l \leq 0$ donc $|u_n - l| = l - u_n$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, \underline{l - u_n < \varepsilon} \Leftrightarrow u_n > l - \varepsilon$

$(u_n) \nearrow$: Si $\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} > l - \varepsilon$, alors $\forall n > n_0, u_n \geq u_{n_0} > l - \varepsilon$

Supposons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l - \varepsilon$ alors $\underline{l - \varepsilon}$ majore A or $\underline{l - \varepsilon} < l$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : u_{n_0} > l - \varepsilon$

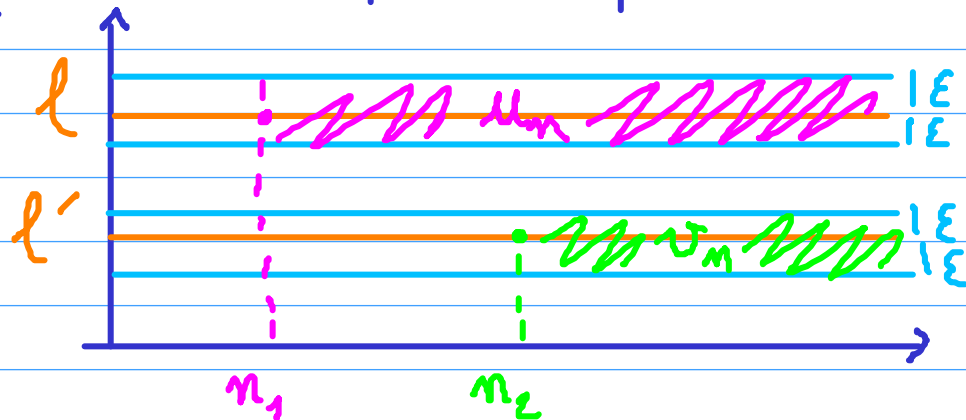
$l - \varepsilon$ est un majorant $< \sup A$
absurde

$\forall n > n_0, u_n \geq u_{n_0} > l - \varepsilon$ donc $|u_n - l| = l - u_n < \varepsilon$ ✓

Passage à la limite Si $u_n \rightarrow l$ et $\forall m \in \mathbb{N}, u_m \leq v_m$, alors $l \leq l'$
 $v_m \rightarrow l'$

Preuve Supposons $l > l'$

On pose $\varepsilon = \frac{l-l'}{4} > 0$



Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_1 : u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ $u_n > l-\varepsilon = \frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l'$

$n_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_2 : v_n \in]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$ $v_n < l'+\varepsilon = \frac{3}{4}l' + \frac{1}{4}l$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$u_{n_0} > \frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l'$$

$$v_{n_0} < \frac{3}{4}l' + \frac{1}{4}l$$

$$\frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l' > \frac{3}{4}l' + \frac{1}{4}l$$

$$u_{n_0} > v_{n_0} \text{ als.}$$

⚠ Inégalités strictes

$$\frac{1}{n} > 0 \not\Rightarrow 0 > 0$$

Suites adjacentes

① $(u_n) \nearrow$

② $(v_n) \searrow$

③ $(u_n - v_n) \rightarrow 0$

alors (u_n) et (v_n) convergent
vers une même limite

Preuve Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Supposons $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \underline{u_{n_0} > v_{n_0}}$

$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq u_{n_0}$
 $v_n \leq v_{n_0}$
($-v_n \geq -v_{n_0}$)

$u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} \xRightarrow{\text{lim.}} 0 \geq u_{n_0} - v_{n_0}$
 $v_{n_0} \geq u_{n_0}$ absurde

$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

$(u_n) \nearrow$ majorée par v_0 $u_n \rightarrow l$
 $(v_n) \searrow$ minorée par u_0 $v_n \rightarrow l'$

Si $l \neq l'$, alors $(u_n - v_n) \rightarrow l - l' \neq 0$ absurde
 $(u_n - v_n) \rightarrow 0$

Donc $l = l'$

À vous de jouer!

- ① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

- ② Montrer que l'équation

$$n \in \mathbb{N}^* \quad (n \geq 1)$$

$$x + \dots + x^n = 1$$

admet dans $[0, 1]$ une unique solution, notée x_n

Montrer que (x_n) converge vers une limite finie, qui est $\frac{1}{2}$

①

②