

Convergence des suites (Exercices)

① Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ convergent

Soit $n \geq 1$

$$\bullet u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \quad (u_n) \nearrow$$

$$\begin{aligned} \bullet v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{\overset{n^2+n}{n(n+1)}}{n(n+1)^2} - \frac{\overset{-(n^2+2n+1)}{(n+1)^2}}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 \quad (v_n) \searrow \end{aligned}$$

$$\bullet u_n - v_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(u_n) et (v_n) adjacentes donc elles convergent

② Montrer que l'équation $x + \dots + x^n = 1$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution, notée x_n

Montrer que (x_n) converge vers $\frac{1}{2}$

$$n \geq 1 \quad f_n: x \mapsto x + \dots + x^n \quad f_n(0) = 0 \quad f_n(1) = n \geq 1$$

f_n continue

$$\text{TVI: } \exists \underline{x_n \in [0, 1]} : f_n(x_n) = 1$$

$$f_n': x \mapsto 1 + \dots + x^{n-1} \quad \text{fixé}$$

$\forall x \in [0, 1], f_n'(x) > 0$ donc f_n str $\uparrow$ sur $[0, 1]$

Soit $x \in [0, 1]$ $x \neq x_n$ $x < x_n \Rightarrow f(x) < f(x_n) = 1$

$x > x_n \Rightarrow f(x) > f(x_n) = 1$

$\Rightarrow$ Unique solution

$$x_n \text{ suit de } x + \dots + x^n = 1$$

$$x_n + \dots + x_n^n = 1$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = x_{n+1} + \dots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} = 1$$

$$f_{n+1}(x_n) = \underbrace{x_n + \dots + x_n^n}_{= f_n(x_n) = 1} + \underbrace{x_n^{n+1}}_{\geq 0} \geq 1$$

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$$

$$f_{n+1} \text{ str } \nearrow : x_n \geq x_{n+1}$$

$(x_n) \searrow$ minorée par 0

$$(x_n) \longrightarrow l \in [0, 1]$$

$$l \in [0, 1[$$

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1[, f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1$$

$$x_2 : x + x^2 = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_2 < 1$$

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - \frac{1}{2^n} - 1 = 1 - \frac{1}{2^n} = f_n(x_n) - \frac{1}{2^n} < f_n(x_n)$$

$$\frac{1}{2} < x_n \Rightarrow \frac{1}{2} \leq l \leq x_n \xrightarrow{f_n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq f_n(l) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$n \rightarrow +\infty$$

$$f_n(l) \rightarrow 1$$

$l \neq 1$

$$f_n(l) = \frac{1-l^{n+1}}{1-l} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-l} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-l} = 2 \Leftrightarrow l = \frac{1}{2}$$

Exercice bonus

Étudier la limite de $(L u_n)$ dans le cas où :

1) $u_n \rightarrow +\infty$ $L u_n \rightarrow ?$ Forme ind. ?

2) $u_n \rightarrow 0$

3) u_n n'a pas de limite

Solutions : martintraussard.fr