

Limites de fonctions (Exercices)

① Montrer à l'aide de la définition que a) $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 4$ finie

À prouver: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x-2| < \eta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| |x+2|$$

Soit $\eta > 0$

Si $|x-2| < \eta$, $|x^2-4| < |x+2| \eta$

$\eta < 4$ $|x+2| < 4 + \eta$

$|x^2-4| < (4+\eta) \eta = 4\eta + \eta^2 < \frac{\varepsilon}{2}?$

On pose $\eta = \min \left(2, \frac{\varepsilon}{16}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \right)$

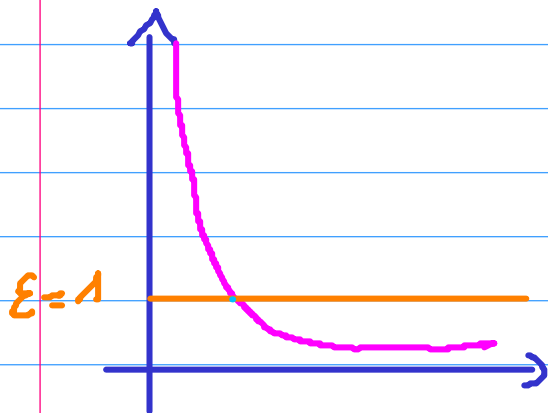
Soit $x \in \mathbb{R} : |x-2| < \eta$

alors $|x^2-4| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \eta < \frac{\varepsilon}{8}$ $\Leftrightarrow \eta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$

b) $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ NON $(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^*, |x| < \eta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon)$

$(\Rightarrow) \exists \varepsilon > 0 : \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}^* : |x| < \eta \text{ ET } \left| \frac{1}{x} \right| \geq \varepsilon$



On pose $\varepsilon = 1$

Soit $\eta > 0$

Si $\eta \geq 1$, alors $x = \frac{1}{2}$ vérifie $|x| < \eta$
 $\left| \frac{1}{x} \right| = 2 \geq \varepsilon$

Si $\eta < 1$, alors $x = \frac{\eta}{3}$ vérifie $|x| < \eta$

$$\left| \frac{1}{x} \right| = \frac{3}{\eta} > \frac{1}{\eta} > 1 = \varepsilon$$

② Soit $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}$

a) Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} |l|$

Si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \Rightarrow \underline{|f(x) - l| < \varepsilon}$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \Rightarrow \underline{||f(x)| - |l|| < \varepsilon} \quad ?$$

$$\text{I.T. : } ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

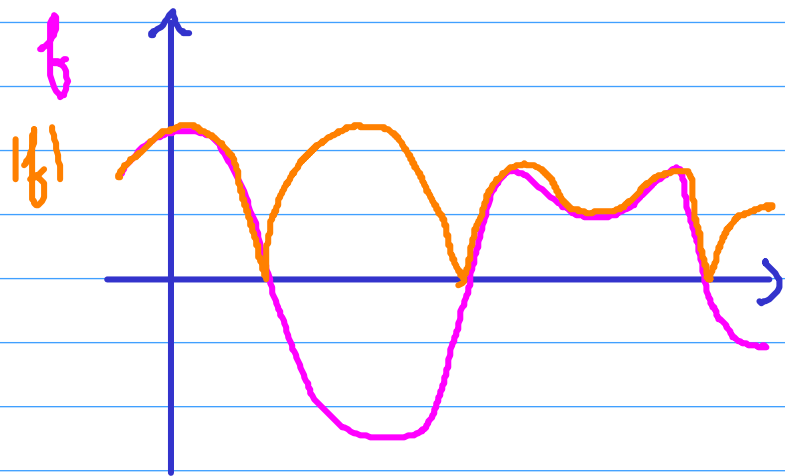
Soit $\varepsilon > 0$

On pose $\eta > 0 : \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ✓

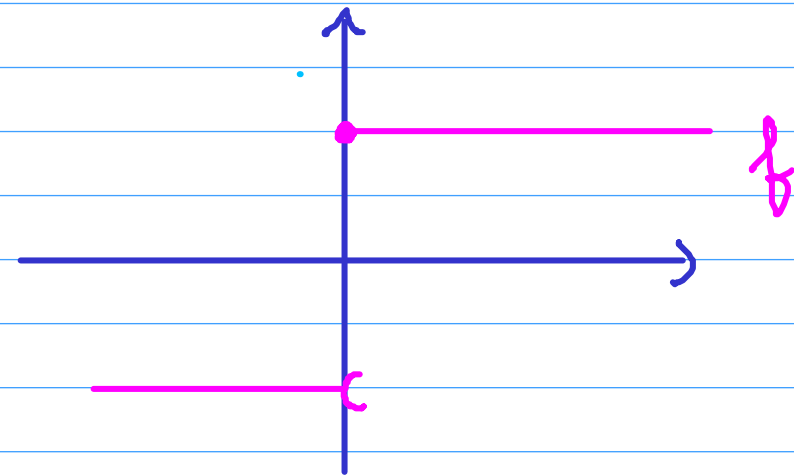
Soit $x \in \mathcal{D}_f$, si $|x - a| < \eta$, $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$

b) Contre-exemple pour la réciproque ?

$$|f(x)| \rightarrow |l| \Rightarrow f(x) \rightarrow l$$



Soit $f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$



$$|f(x)| = 1$$

$$|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

f n'a pas de lim en 0

Exercice bonus

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que :

f a une limite finie en $+\infty$

$\Leftrightarrow$

$(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite finie en $+\infty$

Solutions : martintraussard.fr