

Calcul des limites

Opérations sur les limites



Formes indéterminées!

$$\frac{\infty - \infty}{x \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{0}{0} \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$0 \times \infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{x^2 - x}{x \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{x - x^2}{x \rightarrow -\infty}$$

$$\frac{x}{x^2} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{x^2}{x} \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{x}{x^2} \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{x^2}{x} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{x} \times x^2 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{x^2} \times x \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{(x+l) - x}{x \rightarrow l}$$

$$\frac{(x+\cos x) - x}{x \rightarrow \text{pas de lim}}$$

$$0^0 \quad x \rightarrow 0^+$$

$$1^\infty \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\infty^0 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^x \quad x \rightarrow e^{-1}$$

$$\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^{x^2} \quad x \rightarrow 1$$

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x \quad x \rightarrow e$$

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{x^2} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\left(e^x\right)^{\frac{1}{x}} \quad x \rightarrow e$$

$$\left(e^x\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad x \rightarrow 1$$

Encadrements

$\cos$, $\sin$, $(-1)^n$, partie entière, valeurs absolues

$\ln < \text{puiss.} < \exp$

Croissances comparées

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$x e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\frac{x \ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Quites $\frac{q^n}{n!} \rightarrow 0$

$$a, b > 0$$

$$\left(\frac{e^x}{x^b} \right)^a$$

$$x^a (e^x)^b$$

$$\frac{(\ln(x))^a}{x^b}$$

$$x^a (\ln x)^b$$

$$\frac{e^{0,135x}}{x^{1000}}, \frac{e^{957x}}{\sqrt{x}}, \dots$$

$$x^5 e^{0,7x}, x \sqrt{x} e^{3x/7}, \dots$$

$$\frac{(\ln(x))^{105}}{x^{0,001}}, \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{150}}, \dots$$

$$\sqrt{x} (\ln x)^{300}, \dots$$

$$q^n = e^{n \ln q}$$

$\ln(n) < \text{puissances} < \exp / \text{géomr} < n! < n^n$

Terme dominant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x - \sqrt{x} e^{2x} + x^{100} = \underbrace{\sqrt{x} e^{2x}}_{\rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{x^{3/2}}{e^x}}_{\rightarrow 0} - 1 + \frac{x^{\frac{100}{2}}}{\underbrace{e^{2x}}_{\rightarrow 0}} \right) \xrightarrow{-1} -\infty$$

Transformation exp/ln

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{e^n}}{2^{3^n}} = \exp(\ln(e^{e^n}) - \ln(2^{3^n})) = \exp(\underbrace{e^n - 3^n \ln 2}_{\rightarrow -\infty}) = 0$$

$= \frac{3^n \left(\left(\frac{e}{3} \right)^n - \ln 2 \right)}{\rightarrow +\infty \quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow -\ln 2} \rightarrow -\infty$

Quantité conjuguée $\sqrt{a-b} = \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\sqrt{x^2}} - x = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Taux d'accroissement

f dérivable en a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1) = 1$$

$$n \rightarrow +\infty \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(1) = e$$

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \exp'(0) = 1$$

À vous de jouer !

① Calculer les limites :

a) $e^{2x} - x\sqrt{x}e^x + x^4$ $+\infty$

b) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ $+\infty$

c) $\frac{x \ln x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 2x}$ $+\infty$

d) $\frac{\lfloor \ln(\sqrt{x}) \rfloor}{\sqrt{x}}$ $+\infty$

e) $\frac{1 - \cos x}{x}$ 0

f) $\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$ 0

g) $\frac{x \sin x}{1+x^2}$ $-\infty$

h) $\frac{\tan x}{x}$ 0

i) $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x}$ 0

j) $\left(1 + \frac{1}{2^m}\right)^{m^2}$ $+\infty$