

Continuité

Intervalles de $\mathbb{R}$

Bornés

$[a, b]$

$]a, b]$

$[a, b[$

$]a, b[$

Non bornés

$] -\infty, a]$

$] -\infty, a[$

$[a, +\infty[$

$]a, +\infty[$

$\mathbb{R} :] -\infty, +\infty[$

$\emptyset :]1, 1[$

Caractérisation

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in I^2, [x, y] \subset I$



$\forall t \in [x, y], t \in I$

Intervalles ouverts

$]a, b[$

$]a, +\infty[$

$] -\infty, a[$

$\mathbb{R}$

Continuité en un point

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ^{intervalle} $a \in I$

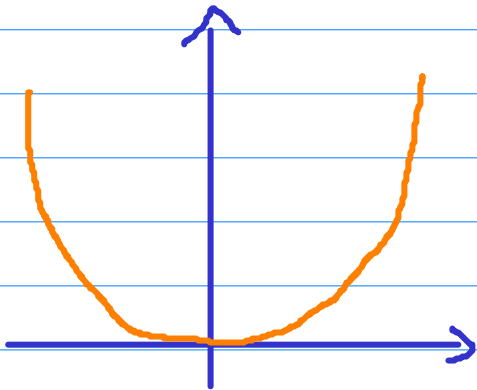
f est continue en $a \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

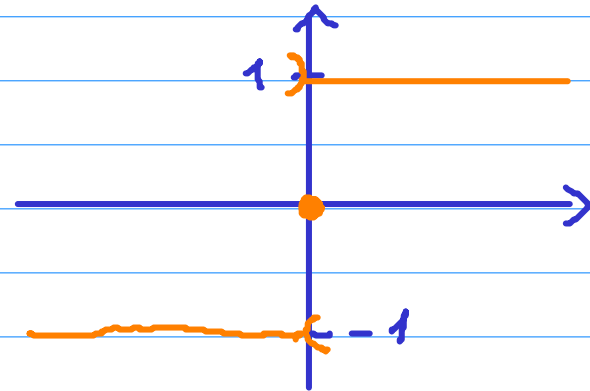
Continuité sur un intervalle

$\forall a \in I, f$ continue en a

Exemples



$f: x \mapsto x^2$



$g: x \mapsto \text{sgn}(x)$

Caractérisation séquentielle

limite $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \iff$

$$f: x \mapsto \cos x$$

$$u_n = 2\pi n \longrightarrow +\infty$$
$$f(u_n) \longrightarrow 1$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

suites à
valeurs dans
dans I

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$$

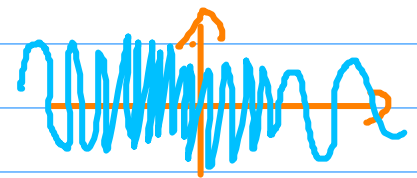
$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

Continuité f continue en $a \iff$

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) \quad \forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$$

⚠ Contre-exemples!

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\exists (u_n) \quad u_n \rightarrow a \text{ et } f(u_n) \rightarrow f(a)$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$$u_n \rightarrow 0$$

$$f(u_n) = 1 \longrightarrow 1 \neq f(0)$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur $[a, b]$ et $k \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$

$$\exists c \in [a, b] : f(c) = k$$

Preuve $f(a) < k < f(b)$

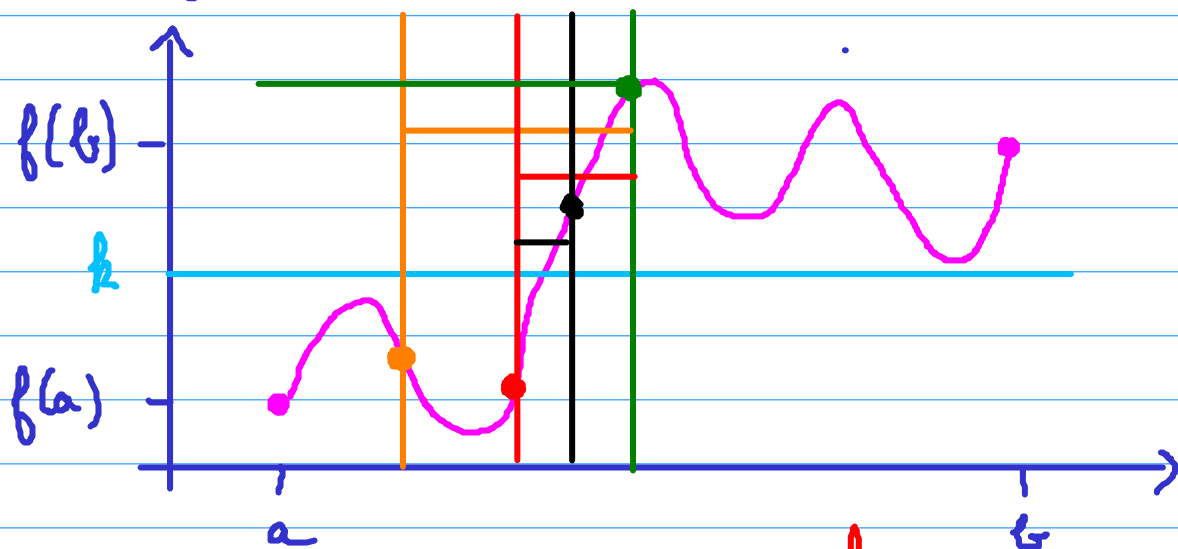
$$a_0 = a \quad b_0 = b$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_m + b_m}{2}\right) > k \quad a_{m+1} = a_m; \quad b_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2}$$

$$\text{sinon } < k \quad a_{m+1} = \frac{a_m + b_m}{2}; \quad b_{m+1} = b_m$$

$$b_m - a_m = \frac{b_0 - a_0}{2^m} \rightarrow 0$$

$(a_m) \nearrow, (b_m) \searrow$) Suites adjacentes $\rightarrow c$



$$\begin{aligned} f(a_m) &\leq k \leq f(b_m) \\ f(c) &\leq k \leq f(c) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{continue} \\ f(c) = k \end{array} \right\}$$

Théorème des bornes atteintes $f: \overset{\text{Fermé}}{\underset{\text{Borné}}{[a,b]}} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors f est bornée et atteint ses bornes $f(x) \in [m, M]$

Théorème du point fixe $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$\forall x \in [a,b], f(x) \in [a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = c$

$$f: x \in [0,1] \rightarrow x^2$$

Preuve $g: x \in [a,b] \mapsto f(x) - x$ continue

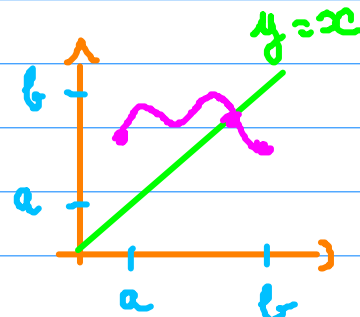
$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

$$f(a) \in [a,b]$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

$$f(b) \in [a,b]$$

$\exists c \in [a,b] : g(c) = 0$
 $f(c) - c = 0$
 $f(c) = c$



À vous de jouer!

① Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$, f est bornée.

② Montrer que tout polynôme de degré impair a une racine réelle.

③ Soit f, g continues sur $\mathbb{R}$

Montrer que $\max(f, g)$ est continue.