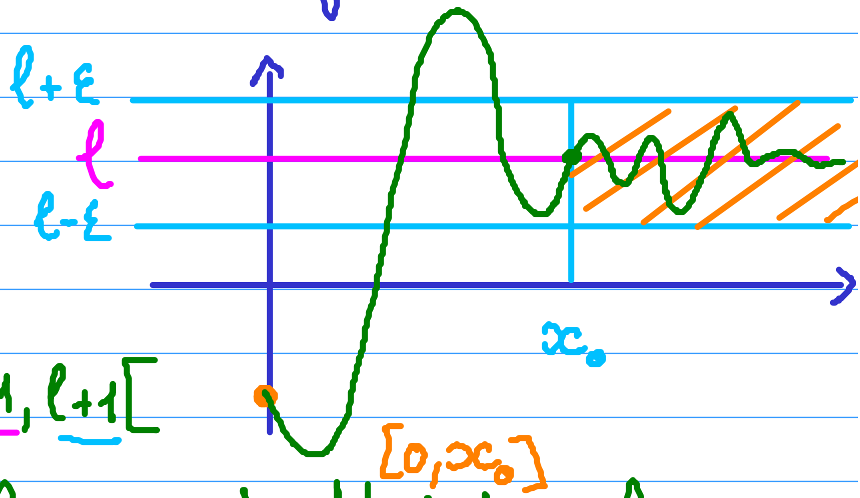
Continuité (Exercices)

$[0,+\infty[$

① Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$, f est bornée.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$



soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant x_0, |f(x)-\ell| < 1$

$f(x) \in \,]\ell-1, \ell+1[$

f est continue sur $[0,x_0]$ donc f est bornée et atteint ses bornes

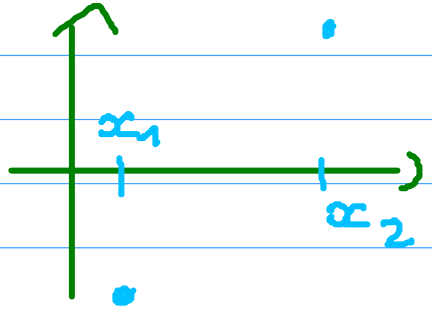
$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 : \forall x \in [0,x_0], \; m \leq f(x) \leq M$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \min(\ell-1, m) \leq f(x) \leq \max(\ell+1, M)$ ✓

② Montrer que tout polynôme de degré impair a une racine réelle.

$f : x \longmapsto a\,x^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \qquad a \neq 0 \qquad n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^{2n+1}\left(a + \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} \frac{a_k}{x^{\underline{2n+1-k}\,>0}}}_{\xrightarrow[\pm\infty]{} 0}\right)$



Si $a > 0$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $\qquad \exists x_1 \in \mathbb{R} : \forall x \geq x_2,\ f(x) \geq 1$ $\qquad f(x_2) \geq 1$

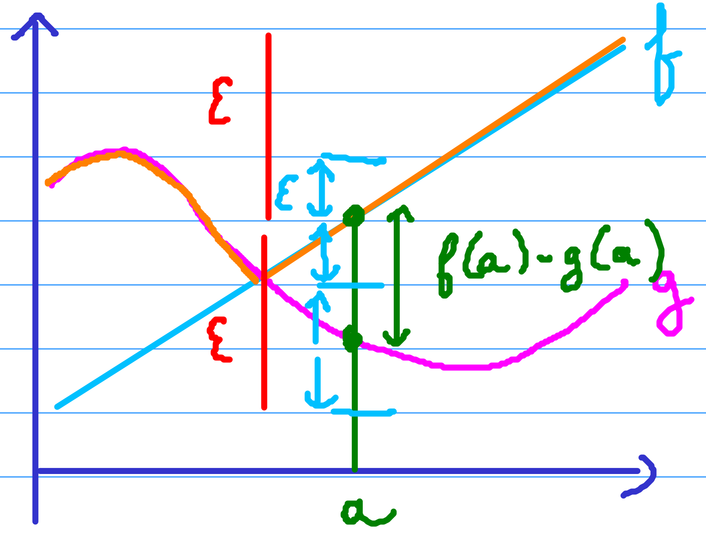
$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ $\qquad \exists x_2 \in \mathbb{R} : \forall x \leq x_1,\ f(x) \leq -1$ $\qquad f(x_1) \leq -1$

$\left.\begin{array}{l} 0 \in [f(x_1), f(x_2)] \\ f \text{ est continue sur } [x_1, x_2] \end{array}\right)$ TVI : $\exists c \in [x_1, x_2] : f(c) = 0$ ✓

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x-a| < \eta \Rightarrow \left|\max(f(x), g(x)) - \max(f(a), g(a))\right| < \varepsilon$

③ Soit f, g continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\max(f,g)$ est continue.

Soit $a \in \mathbb{R}$ Soit $\varepsilon > 0$



<u>Si $f(a) > g(a)$</u> $\varepsilon' = \min\left(\varepsilon, \frac{f(a)-g(a)}{2}\right)$

$\eta_1 > 0$ tq $|x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

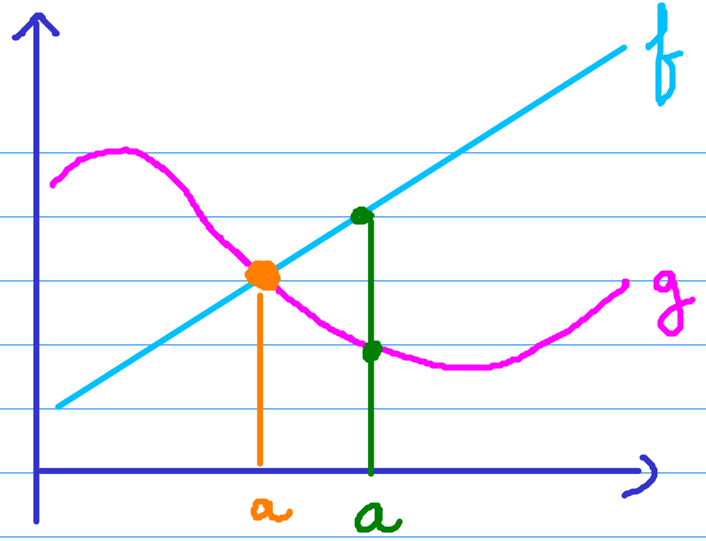
$\eta_2 > 0$ tq $|x-a| < \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$

$\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$

$|x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{f(a)-g(a)}{2}$ $g(x) < \frac{f(a)+g(a)}{2}$

$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)-g(a)}{2}$

$f(a) - f(x) < \text{“}$ $\underbrace{f(x)}_{\max.} > \frac{f(a)+g(a)}{2}$



$$|x-a|<\eta \Longrightarrow \max(f(x),g(x)) = f(x)$$

$$|\underline{f(x)} - \underline{f(a)}| < \varepsilon$$

$$|\underline{\max(f(x),g(x))} - \underline{\max(f(a),g(a))}| < \varepsilon$$

Si $g(a) > f(a)$: idem

Si $f(a) = g(a)$: $\eta_1 > 0 \quad |x-a| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$$\eta_2 > 0 \quad |x-a| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon$$

$$\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$$

$$|x-a|<\eta \quad |\max(f(x),g(x)) - \underbrace{\max(f(a),g(a))}_{=f(a)=g(a)}| = \begin{cases} |f(x)-f(a)| < \varepsilon \\ |g(x)-g(a)| < \varepsilon \end{cases}$$

Exercice bonus

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \max_{0 \leq k \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$u_1 = \max\left(f(0), f(1)\right)$

$u_2 = \max\left(f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right)$

$\vdots$

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

Solutions : martintroussard.fr