

Dérivabilité

Définition: f est dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \in \mathcal{D}_f)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et est finie} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (a+h \in \mathcal{D}_f)}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple: $f: x \mapsto x^2$ en $a = 3$

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = 6+h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 6$$

$f'(a)$

$f: x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $a = 0$

Si l'existe

$$u_n \rightarrow 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) \rightarrow l$$

$h \neq 0$ $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$ mais pas de lim ($h \rightarrow 0$) $\times$

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \quad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

$f: x \mapsto \sqrt{x}$ en $a = 0$ $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$ $\times$

Développement limité f dérivable en a

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$



$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(x-a)g(x)}_{\rightarrow 0}$$

$$\Leftrightarrow \exists g : \begin{cases} g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)g(x) \end{cases}$$

négligeable par rapport à $(x-a)$

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$$

DL d'ordre 1

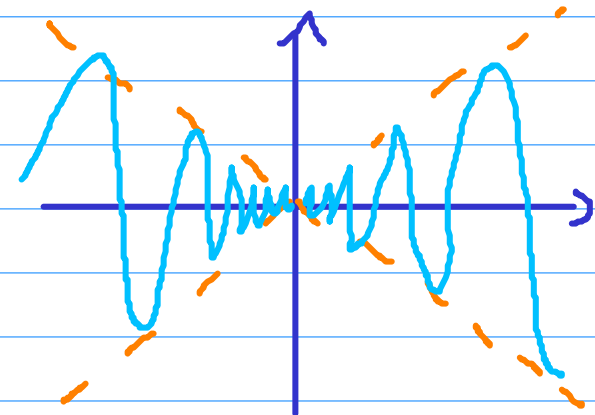
Lien dérivabilité - continuité

$$f \text{ dérivable} \Rightarrow f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{\substack{\xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{0}}} + \underbrace{(x-a)}_{\xrightarrow{0}} \underbrace{g(x)}_{\substack{\xrightarrow{0} \\ \xrightarrow{x \rightarrow a} 0}} \xrightarrow{0}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \Rightarrow f \text{ continue}$$

Contre-exemple $f: x \mapsto \sqrt{x}$ en $a = 0$

$$f: x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow \underbrace{g(f(x))}_{\in J}$$

Dérivée d'une composée

$$g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$$

- ① f dérivable sur I
 ② g dérivable sur J
 ③ $\forall x \in I, f(x) \in J$
- $\Rightarrow$

$g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exemples

Fonction	Dérivée
u^n	$n u' u^{n-1}$
e^u	$u' e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u^\alpha \text{ ou } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\triangle \alpha < 1, u(x) \neq 0)$$

À vous de jouer !

① Soit u et v dérivables en $a \in \mathbb{R}$ (avec $v(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{D}_v$)

Montrer que $\frac{u}{v}$ est dérivable en a

② Soit $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f' n'est pas continue en 0 .