

Dérivabilité (Exercices)

① Soit u et v dérivables en $a \in \mathbb{R}$ (avec $v(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{D}_v$)

Montrer que $\frac{u}{v}$ est dérivable en a

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$h \neq 0$

$$\frac{\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{h} = \frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a+h)}{h v(a+h)v(a)}$$

$$= \frac{[u(a+h)v(a) - u(a)v(a)] + [u(a)v(a) - u(a)v(a+h)]}{h v(a+h)v(a)}$$

$$= \frac{1}{v(a+h)v(a)} \left[v(a) \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h} - \left(u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \right) \right]$$

$h \rightarrow 0$

cont.

$\rightarrow v(a)$

$\rightarrow u'(a)$

$\rightarrow v'(a)$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{(v(a))^2}$$

② Soit $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que f' n'est pas continue en 0.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$
 $\sin$ dérivable sur $\mathbb{R}$

Par compo $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dér. / $\mathbb{R}^*$
 Par produit f dérivable sur $\mathbb{R}$

$u(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

$$a=0 \quad h \neq 0 \quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = h \sin \frac{1}{h}$$

$$\begin{array}{l} h > 0 \quad -h \leq h \sin \frac{1}{h} \leq h \\ h < 0 \quad h \leq h \sin \frac{1}{h} \leq -h \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} h > 0 \\ h < 0 \end{array}} \right) \quad h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$f \text{ dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0 \quad x \neq 0, \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) \not\rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}$$

$$f'(x_n) = -1$$

$$\not\rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) \not\rightarrow f'(0) \quad x \rightarrow 0$$

f' non continue en 0

Exercice bonus

Donner le domaine de dérivabilité et dériver :

$$a) x \mapsto x e^{1/\ln x}$$

$$b) x \mapsto \cos(\sin(\cos(x)))$$

$$c) x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Solutions : martinrousard.fr