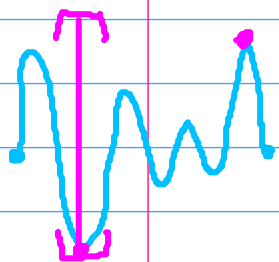


Dérivée et variations

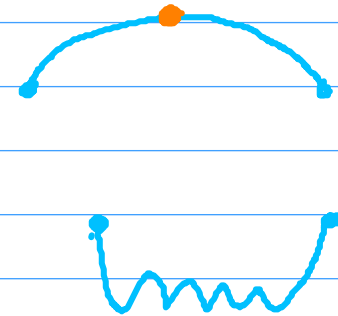
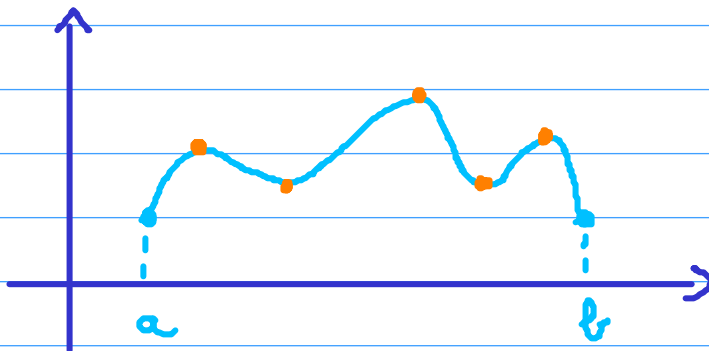
$$a < b$$

Théorème de Rolle f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

Si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[: f'(c) = 0$



max
min



Preuve f continue sur $[a, b] \Rightarrow$ bornée et atteint ses bornes ($m | M$)

f non
const.

$f(a) \neq m$ ou $\frac{f(a) \neq M}{f(b) \neq M}$

On peut poser $c \in]a, b[$ tq $f(c) = M$

max. local : $f'(c) = 0$

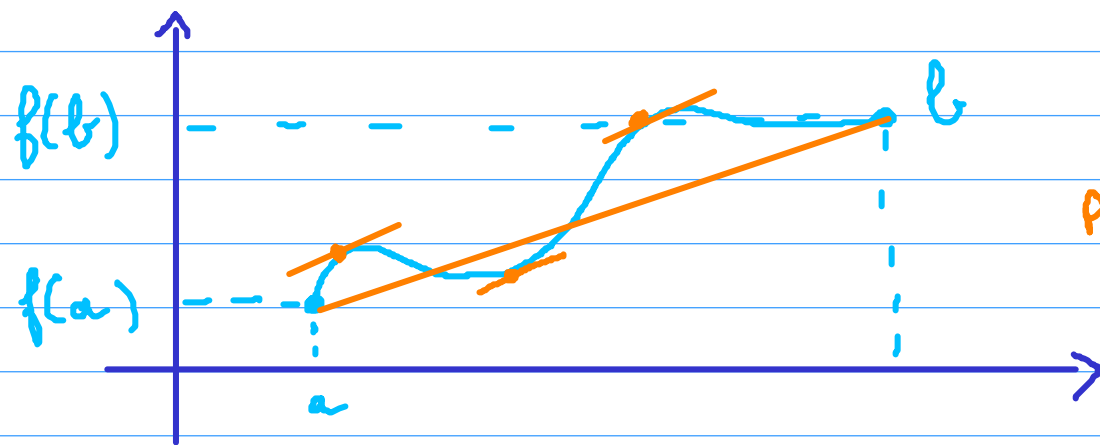
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

$$a < b$$

Accrissements finis f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



$$\text{Pente: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve $g: x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$ $g(a) = f(a)$
 $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a)$

Rolle: $\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$ $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, [x, y] \subset \mathbb{I}$$

Lien dérivée - variations $\mathbb{I}$ intervalle $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

f croissante sur $\mathbb{I} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{I}, f'(x) \geq 0$

Preuve $(\Rightarrow)$ Soit $a \in \mathbb{I}$, $h \neq 0$

$$\underline{h > 0} \quad f(a+h) \geq f(a) \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \quad \xrightarrow{h \rightarrow 0} \quad f'(a) \geq 0$$

$$\underline{h < 0} \quad f(a+h) \leq f(a) \quad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad f'(a) \geq 0$$

$(\Leftarrow)$ Soit $x, y \in \mathbb{I}$ $x < y$

$$[x, y] \subset \mathbb{I}$$

$f \in \mathcal{C}^0 / [x, y]$
dér.] x, y [

Accr. finis $\exists c \in]x, y[: f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

$$f(y) - f(x) = \underline{f'(c)} \quad \overset{\geq 0}{\underline{y - x}} \geq 0 \quad f(y) \geq f(x) \quad f \text{ croissante}$$

Croissance stricte ? f str. croissante sur $I \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \forall x \in I, f'(x) > 0$

$(\Leftarrow)$ Oui $x < y \in I \quad c \in]x, y[: \underbrace{f'(c)}_{>0} = \underbrace{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}}_{>0} > 0$

$(\Rightarrow)$ Non Passage à la limite $f: x \mapsto x^3 \quad f'(0) = 0$

Autre critère

f str. croissante $\Leftrightarrow \begin{cases} f' \geq 0 \\ f' \text{ ne s'annule pas sur un intervalle ouvert} \end{cases}$

$(\Rightarrow)$ $f' \geq 0$ si $f' = 0$ sur $]a, b[\subset I$ f const. sur $]a, b[$ absurde

$(\Leftarrow)$ $x < y \quad f(x) \leq f(y)$ Si $f(x) = f(y)$ f const. sur $[x, y]$
 $f' = 0$ ——— absurde

À vous de jouer!

① Inégalité des accroissements finis : f cont. sur $[a, b]$, dér. sur $]a, b[$

a) Montrer que si $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$

b) En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin x| \leq |x|$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

② Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que :

a) Si f' ne s'annule pas, f n'est pas périodique

b) Si f a n racines distinctes, f' en admet au moins $n-1$