

Dérivée et variations (Exercices)

$$a < b$$

① Inégalité des accroissements finis : f cont. sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

a) Montrer que si $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$

① f continue sur $[a, b]$

$$\hookrightarrow \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq M$$

② f dérivable sur $]a, b[$

Accroissements finis : $\exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$|f'(c)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq M$$

$$\leq M$$

$$\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M \implies |f(b) - f(a)| \leq |b - a|$$

6) En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\sin x| \leq |x|$ $\sin(0) = 0$

$x > 0$ $\sin$ C^0 sur $[0, x]$
 dér sur $]0, x[$

$$\forall t \in]0, x[, |\sin'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$$

$$\text{IAF: } |\sin(x) - \sin(0)| \leq 1 \times |x - 0|$$

$$\begin{array}{ll} x < 0 & -x > 0 \\ |\sin(-x)| \leq |-x| & \\ |\sin x| \leq |x| & \end{array}$$

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad x < y$$

$\cos$ C^0 sur $[x, y]$
 dér sur $]x, y[$

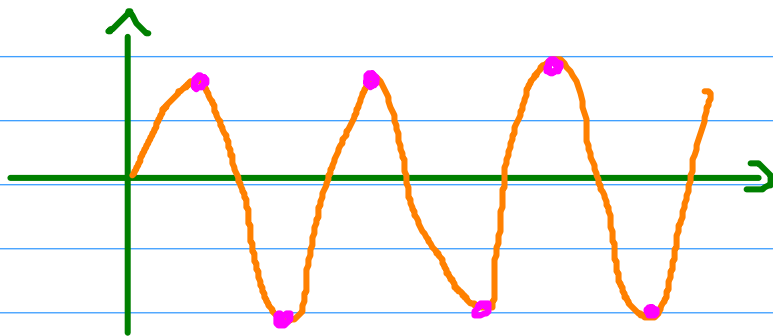
$$\forall t \in]x, y[, |\cos'(t)| = |-\sin(t)| \leq \underline{1}$$

$$\text{IAF: } |\cos x - \cos y| \leq \underline{1} |x - y|$$

② Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que :

a) Si f' ne s'annule pas, f n'est pas périodique

Contraposée f périodique $\Rightarrow f'$ s'annule



$$\exists T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x) \qquad f(0) = f(T)$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ } C^0 \text{ sur } [0, T] \\ \text{dér. sur }]0, T[\\ f(0) = f(T) \end{array} \right\} \underline{\text{Rolle}} \quad \exists c \in]0, T[: f'(c) = 0$$

b) Si f a n racines distinctes, f' en admet au moins $n-1$

$x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts
(racines)

$$x_1 < \dots < x_n$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$$

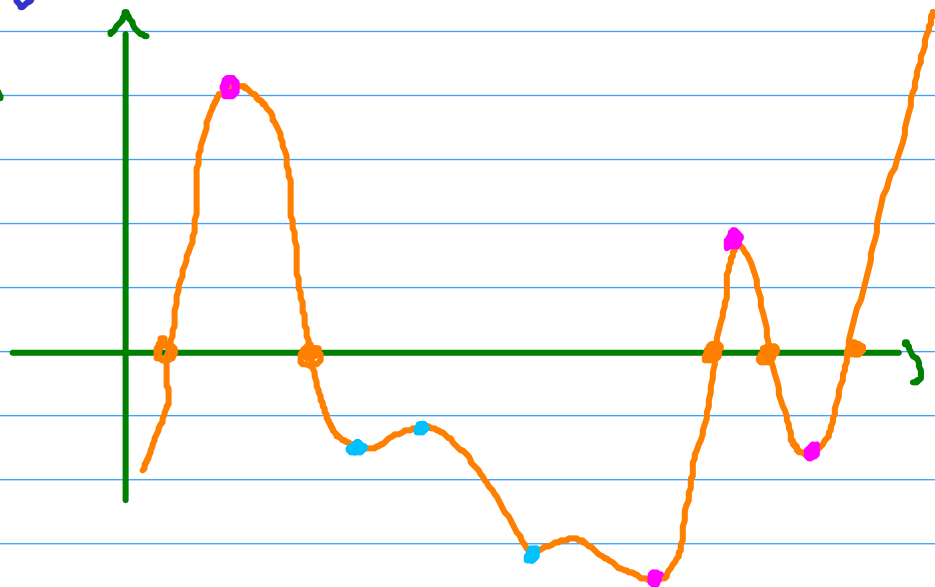
$\rightarrow f \in C^0$ sur $[x_i, x_{i+1}]$

$\rightarrow f$ dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$

$$\rightarrow f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$$

Rolle : $\exists c_i \in]x_i, x_{i+1}[: f'(c_i) = 0$

$\rightarrow c_i$ sont $n-1$ racines distinctes de f'



Exercice bonus

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

Solutions : martintraussard.fr