

Relations linaires

Approche intuitive : Proposition liant deux objets

Exemples " Paris est la capitale de la France "
Rome Italie
Berlin Allemagne

"... est la capitale de ..." Relation binaire
"..." nombre
"..." = "..."
"..." divisible par ..."
"..." est // à ..."
"..." ∈ ..."
élément ens.
"..." est solution de ..."
nombre équat.
"..." est C° sur ..."
fonct. intervalle

Notation : $x \mathcal{R} y$

$x \mathcal{R} y$

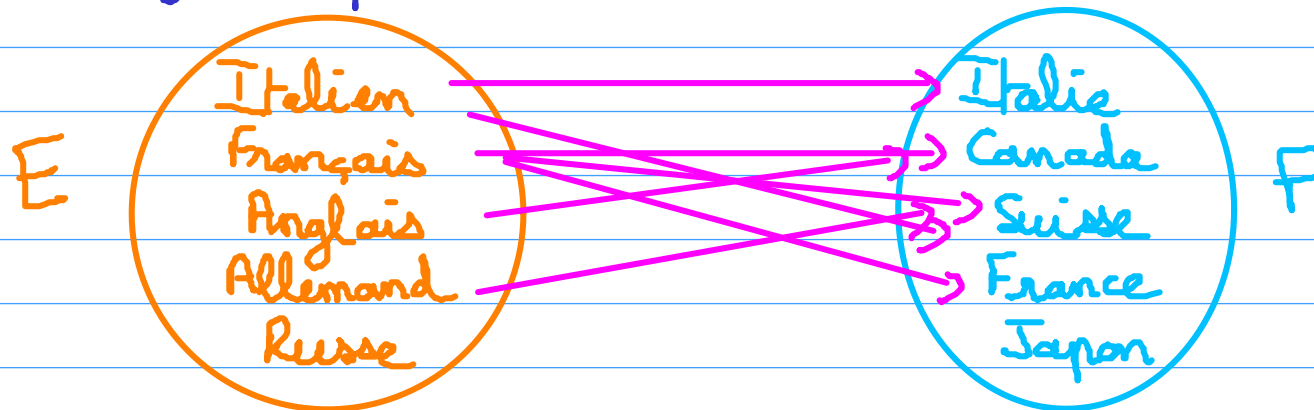
$\mathcal{R}$: "... est la cap. de ..."

Paris $\mathcal{R}$ France

Rome $\not\mathcal{R}$ Japon

Représentation graphique

$\mathcal{R}$: "... est parlée en ..."



Approche formelle

... est la cap. de ...

Relation de E vers F : sous-ensemble G de $E \times F$

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

$$x \not\mathcal{R} y \Leftrightarrow (x, y) \notin G$$

Exemple : $G = \{ (\text{Paris, France}), (\text{Rome, Italie}), \dots \}$

Propriétés des relations binaires

($E = F$)

$$\in E = \dots = \dots \in F$$

$\dots \parallel \dots$
 $\dots \text{ div. par } \dots$

R est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E, xRx$

Exemple: " $\dots \subset \dots$ " est-réflexif

$$E = \mathcal{P}(\dots)$$

" $\dots < \dots$ " ne l'est pas

$$1 < 1$$

R est symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, xRy \Leftrightarrow yRx$

Exemple: " $\dots \perp \dots$ " est symétrique

" $\dots$ est un mult. de $\dots$ "
ne l'est pas

$$4 \nmid 2$$

$$2 \nmid 4$$

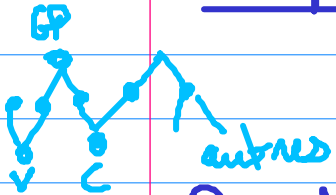
$\mathcal{R}$ est anti-symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ ET } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$

Exemple : "... $\leq$..." antisym. $a \leq b \text{ ET } b \leq a \Rightarrow a = b$

"... divise ..." ($E = \mathbb{N}$) $2 \mid -2 \text{ ET } -2 \mid 2 \not\Rightarrow 2 = -2$

$\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ ET } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Exemple : "... $\equiv$..." [3] est transitive



"... a un g-p commun avec ..." ne l'est pas

$\mathcal{R}$ est totale $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x$

Exemple : "... $\leq$..." ($E = \mathbb{R}$) totale

"... a le même signe que ..."

$2 \not\mathcal{R} -4 \quad -4 \not\mathcal{R} 2$

À vous de jouer!

① Vérifier si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives et totales.

a) " $\dots \subset \dots$ "

b) " $\dots = \dots$ "

c) " $\dots$ divise $\dots$ " ($E = \mathbb{N}$)

d) " $\dots$ divise $\dots$ " ($E = \mathbb{Z}$)

e) " $\dots > \dots$ "

f) " $\dots \geq \dots$ "

g) " $\dots \parallel \dots$ "

h) " $\dots \perp \dots$ "

② Montrer que toute relation totale est réflexive. Réciproque?