

Relations linaires (Exercices)

① Vérifier si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives et totales.

a) "... $\subset$..."

($E = \mathcal{P}(\mathbb{N})$)

$\forall A$	$A \subset A$
$\forall A, B$	$A \subset B \not\Rightarrow B \subset A$
	$\{0\} \subset \{0,1\} \quad \{0,1\} \not\subset \{0\}$
$\forall A, B$	$A \subset B \text{ ET } B \subset A \Rightarrow A = B$
$\forall A, B, C$	$A \subset B \text{ ET } B \subset C \Rightarrow A \subset C$
$\forall A, B$	$A \subset B \text{ OU } B \subset A \quad \times$
	$\{1\} \not\subset \{2\} \quad \{2\} \not\subset \{1\}$

Refl.

Pas sym.

Antisym.

Trans.

Pas tot.

b) "... = ..."

($E = \mathbb{R}$)

$\forall x$	$x = x$
$\forall x, y$	$x = y \Leftrightarrow y = x$
$\forall x, y$	$x = y \text{ ET } y = x \Rightarrow x = y$
$\forall x, y, z$	$x = y \text{ ET } y = z \Rightarrow x = z$
$\forall x, y$	$x = y \text{ OU } y = x \quad \times$
	$1 \neq 2 \quad 2 \neq 1$

Refl.

Sym.

Antisym.

Trans.

Pas tot.

) !

Réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive? Totale?

c) "... divise ..." ($E = \mathbb{N}$)

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : b = \underbrace{k}_\geq 1 a \quad \begin{matrix} b \geq a \\ a \leq b \end{matrix}$$

$$a|a$$

$$a|b \not\Leftrightarrow b|a$$

$$\begin{matrix} 1|2 & 2 \nmid 1 \end{matrix}$$

$$a|b \text{ et } b|a \Rightarrow a=b$$

$$a|b \text{ et } b|c \Rightarrow a|c$$

$$a|b \text{ ou } b|c \quad \times$$

$$\begin{matrix} 2 \nmid 3 & 3 \nmid 2 \end{matrix}$$

Ref.

Pas sym.

Antisym.

Tran.

Pas tot.

d) "... divise ..." ($E = \mathbb{Z}$)

$$a|b \text{ et } b|a \not\Leftrightarrow a=b$$

$$\begin{matrix} 2|-2 & -2|2 & -2 \neq 2 \end{matrix}$$

Pas antisym.

e) "... // ... "

$E = \text{droites de } \mathbb{R}^2$

$$D // D$$

$$D // D' \Leftrightarrow D' // D$$

$$D // D' \text{ et } D' // D \not\Leftrightarrow D = D'$$

$$D // D' \text{ et } D' // D'' \Rightarrow D // D''$$

$$D // D' \text{ ou } D' // D \quad \times$$

Ref.

Sym.

Pas antisym.

Tran.

Pas tot.

Réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive? Totale?

f) "... $\perp$..."

$$\mathcal{D} \not\perp \mathcal{D}$$

Pas refl.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$$

Sym.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \text{ ET } \mathcal{D}' \perp \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$$

Pas antisym.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \text{ ET } \mathcal{D}' \perp \mathcal{D}'' \not\Rightarrow \mathcal{D} \perp \mathcal{D}''$$

Pas tran

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \text{ ou } \mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$$

Pas tot.

g) "... $>$..."

$$E = \mathbb{R}$$

$$x \not> x$$

$$1 \not> 1$$

Pas refl.

$$x > y \Leftrightarrow y > x$$

$$2 > 1 \quad 1 \not> 2$$

Pas sym

$$\underline{x > y \text{ ET } y > x \Rightarrow x = y}$$

Antisym.

$$x < y \text{ ET } y < z \Rightarrow x < z$$

Trans.

$$x < y \text{ ou } y < x \quad \text{X}$$

Pas tot.

$$1 < 1$$

$$1 < 1$$

h) "... $\geq$..."

$$x \geq x$$

Ref

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

Totale

② Montrer que toute relation totale est réflexive. Réciproque ?

Totale : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x$

Soit $x \in E$ $(x, \underbrace{x}_y) \in E^2$ $x \mathcal{R} x$ ou $x \mathcal{R} x$ donc $x \mathcal{R} x$
 $\mathcal{R}$ réflexive

Réciproque Faux

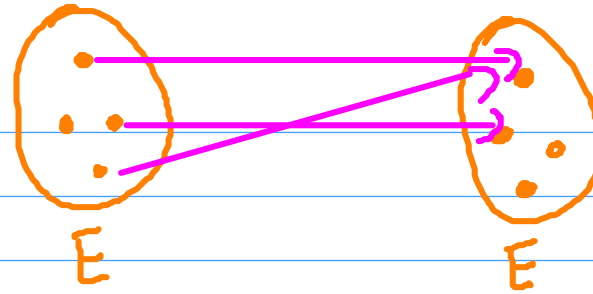
Sur $\mathbb{R}$, " $=$ " est réflexive
pas totale

$$\forall x \in \mathbb{R}, x = x$$

$$1 \neq 2 \quad 2 \neq 1$$

Exercice bonus

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.



- a) Combien y a-t-il de relations binaires sur E ?
- b) De relations réflexives?
- c) Symétriques?

Solutions : martinbraussard.fr