

Relations d'équivalence, relations d'ordre

Relation d'équivalence :

- Réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- Symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$
- Transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Exemples : "... = ..."
"... // ..."

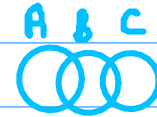
"... $\equiv$... [n]"

Contre-exemples

"... $\geq$..."

← non symétrique

"... a un élément commun avec ..."

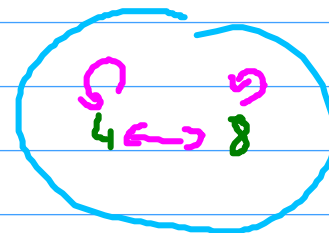
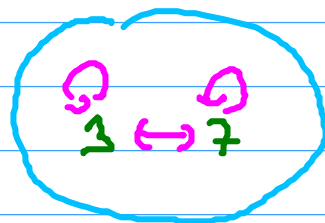
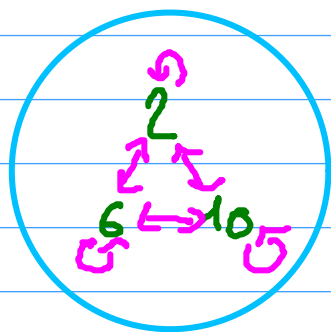
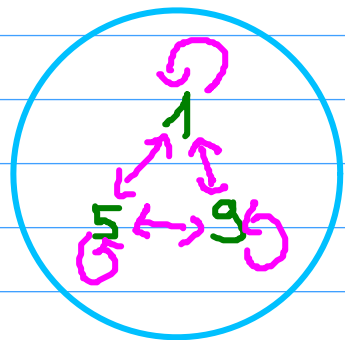


← non transitive

"... $\perp$..."
← pas refl.

Classes d'équivalence

Exemple $E = \{1, \dots, 10\}$



Classes d'équivalence

cl. d'éq. de x

Définition: $\bar{x} = \{y \in E \mid x \mathcal{R} y\}$

ens. des élém. en relat° avec x

Exemple: $\bar{2} = \{2, 6, 10\} = \bar{6} = \bar{10}$

$\bar{4} = \{4, 8\} = \bar{8}$

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x R y\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de E

- Aucune classe n'est vide $x \in E$ R réfl. $x R x$ $x \in \bar{x} \neq \emptyset$
- L'union des classes est E

$$(c) \quad \forall x \in E, \bar{x} \subset E \text{ donc } \bigcup_{x \in E} \bar{x} \subset E$$

$$(c) \quad \text{Soit } x \in E, \underline{x \in \bar{x}} \text{ donc } x \in \bigcup_{e \in E} \bar{e} \text{ donc } E \subset \bigcup_{e \in E} \bar{e}$$

- Deux classes différentes ont une intersection vide

$$\forall (x, y) \in E, (\bar{x} \neq \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset) \Leftrightarrow (\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \bar{x} = \bar{y})$$

Soit $x, y \in E$ tq $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ $z R x$ $z R y \Rightarrow x R y$
 Par tran. $\bar{x} = \bar{y}$ $\text{sqm. } x R y \text{ — } z R y \text{ — } x R y$ Tr. $x \in \bar{y}$

Majorant, mineur, ...

Relation d'ordre

- Réflexive $\forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$
- Antisymétrique $\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \mathcal{R} y \text{ ET } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$
- Transitive $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x \mathcal{R} y \text{ ET } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Ordre total si $\mathcal{R}$ totale $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x)$
partiel sinon

Exemples : "... $\leq$..." dans $\mathbb{R}$ tot. "... $\subset$..." partiel
"... est-un diviseur de ..." dans $\mathbb{N}$ partiel

Contre-exemple : "... $<$..." $\leftarrow$ non réflexif
dans $\mathbb{R}$

À vous de jouer!

Soit $x \in E$, $\bar{x} = \{ \dots \}$

① Déterminer si les relations suivantes sont des relations d'ordre (total ou partiel) ou d'équivalence (classes?)

a) $x R y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$
 $E = \mathbb{R}$

b) $m R n \Leftrightarrow m+n$ pair
 $E = \mathbb{Z}$

c) $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$
 $E = \mathbb{R}^2$

d) $z R z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$
 $E = \mathbb{C}$

② Soit $A \subset E$, on définit $\forall (x, y) \in \mathcal{P}(E)^2$:

$$X R Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

Montrer que R est une relation d'équivalence. Classes?