

Relations d'équivalence, relations d'ordre (Exercices)

① Déterminer si les relations suivantes sont des relations d'ordre (total ou partiel) ou d'équivalence (classes ?)

a) $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$
 $E = \mathbb{R}$

$\mathcal{R}$ rel. d'éq ✓
 ordre X

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \Leftrightarrow \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \text{ ET } \lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor z \rfloor$$

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \text{ ET } \lfloor y \rfloor = \lfloor x \rfloor \not\Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$$

1,2 1,1

Réf.

Sym.

Trans.

Pas
antisym.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé Soit $y \in \mathbb{R}$

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq y < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq y - \lfloor x \rfloor < 1 \Leftrightarrow y - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$$

$$\bar{x} = \{ \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{y} + a \mid a \in [0, 1[\}$$

$$\Leftrightarrow \exists a \in [0, 1[: y = \lfloor x \rfloor + a$$

$$b) n \mathcal{R} m \Leftrightarrow n+m \text{ pair} \quad E = \mathbb{Z}$$

$$n+m = 2n \text{ pair}$$

$$n+m \text{ pair} \Leftrightarrow m+n \text{ pair}$$

$$a+b \text{ pair et } b+c \text{ pair} \Rightarrow a+c \text{ pair}$$

$$a+c = (a+b) + (b+c) - 2b$$

refl.

sym

tran.

équivalence

$$\begin{array}{ccc} n+m \text{ pair et } m+n \text{ pair} & \not\Rightarrow & m=n \\ 1+3 & & 3+1 \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{pas antisym.} & \text{pas rel. d'ordre} \end{array}$$

$$\text{Soit } \underline{n \in \mathbb{Z}} \\ \text{fixé}$$

$$\text{Soit } m \in \mathbb{Z}$$

$$n+m \text{ pair} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n+m = 2k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : m = 2k - n$$

$$\bar{n} = \left\{ \overbrace{2k-n}^m \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(ens. des entiers de $\bar{n}$ parité que n)

$$c \mid (x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \quad E = \mathbb{N}^2$$

$$\begin{cases} x \leq x \\ y \leq y \end{cases} \quad \text{donc } (x, y) \mathcal{R} (x, y)$$

Refl.

$$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \wedge \begin{cases} x' \leq x'' \\ y' \leq y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq x'' \\ y \leq y'' \end{cases}$$

Trans.

Ordre

$$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \wedge \begin{cases} x' \leq x \\ y' \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Antisym

$$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \not\Leftrightarrow \begin{cases} x' \leq x \\ y' \leq y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1, 2) \mathcal{R} (3, 4) \\ (3, 4) \not\mathcal{R} (1, 2) \end{aligned}$$

Pas sym (Pas Réq)

$$(0, 10) \not\mathcal{R} (10, 0)$$

$$(10, 0) \not\mathcal{R} (0, 10)$$

Pas totale

② Soit $A \in E$, on définit $\forall (x, y) \in \mathcal{P}(E)^2$:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \cup A = y \cup A$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Classes?

Réf $x \in \mathcal{P}(E)$ $x \cup A = x \cup A$
 $x \mathcal{R} x$

Sym $(x, y) \in \mathcal{P}(E)^2$ $x \cup A = y \cup A \Leftrightarrow y \cup A = x \cup A$
 $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$

Trans $(x, y, z) \in \mathcal{P}(E)^3$ $x \cup A = y \cup A \wedge y \cup A = z \cup A \Rightarrow x \cup A = z \cup A$
 $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

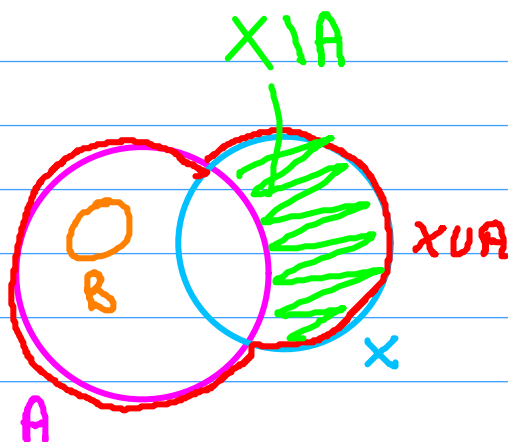
$\mathcal{R}$ relation d'éq.

$$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

classes d'équivalence?

Soit $X \subseteq E$
fixe

Soit $Y \subseteq E$



$$X \mathcal{R} Y \Rightarrow Y \subseteq X \cup A$$

$$\begin{cases} X \setminus A \subseteq Y \setminus A \\ Y \setminus A \subseteq X \setminus A \end{cases} \Rightarrow X \setminus A = Y \setminus A$$

$$Y \in \{(X \setminus A) \cup B \mid B \subseteq A\} \quad \text{classe d'éq. de } X$$

$$Y = (X \setminus A) \cup B \text{ ou } B \subseteq A$$

$$\begin{aligned} Y \cup A &= (X \setminus A) \cup B \cup A = (X \setminus A) \cup A = (X \cap \bar{A}) \cup A \\ &= (X \cup A) \cap (\bar{A} \cup A) = X \cup A \end{aligned}$$

Exercice bonus

Montrer que :

$$z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$$

$E = \mathbb{C}$

définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.

Donner la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Solutions : martintraussard.fr