

Applications

Application (ou fonction) : Relation de E vers F qui à tout $x \in E$ associe un unique élément de F .

Définition formelle : Triplet d'ensembles (E, F, G) tel que :

① $G \subset E \times F$
relation

② $\forall x \in E, \exists ! \underbrace{y \in F}_{f(x)} : (x, y) \in G$

Fonction numérique : $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$
en $E = \mathbb{R}_+^*$ $F = \mathbb{R}$

Vocabulaire : E ensemble de départ (domaine)

F ——— d'arrivée

G graphe

Définition d'une application

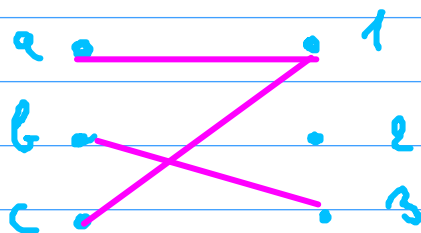
Formule

$$f(x) = x^2$$

$\{(0,0), (1,1), (2,4),$
 $(-1,1), (3,9), \dots\}$
 graphe

Graphe

$$G = \{(a,1), (b,3), (c,1)\}$$



Relation

$\dots$ est la capitale de $\dots$
 $x \quad f(x)$

$\{(Paris, Fr), (Berlin, All), \dots\}$

Notation

$$f: \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto (\text{expression}) \end{cases}$$

Application quelconque $f: E \rightarrow F$

Fonction numérique

$$f: x \in E \mapsto (\text{expr.})$$

$$f: x \mapsto (\text{exp.})$$

$$x \mapsto (\text{expr.})$$

Ensemble des applications

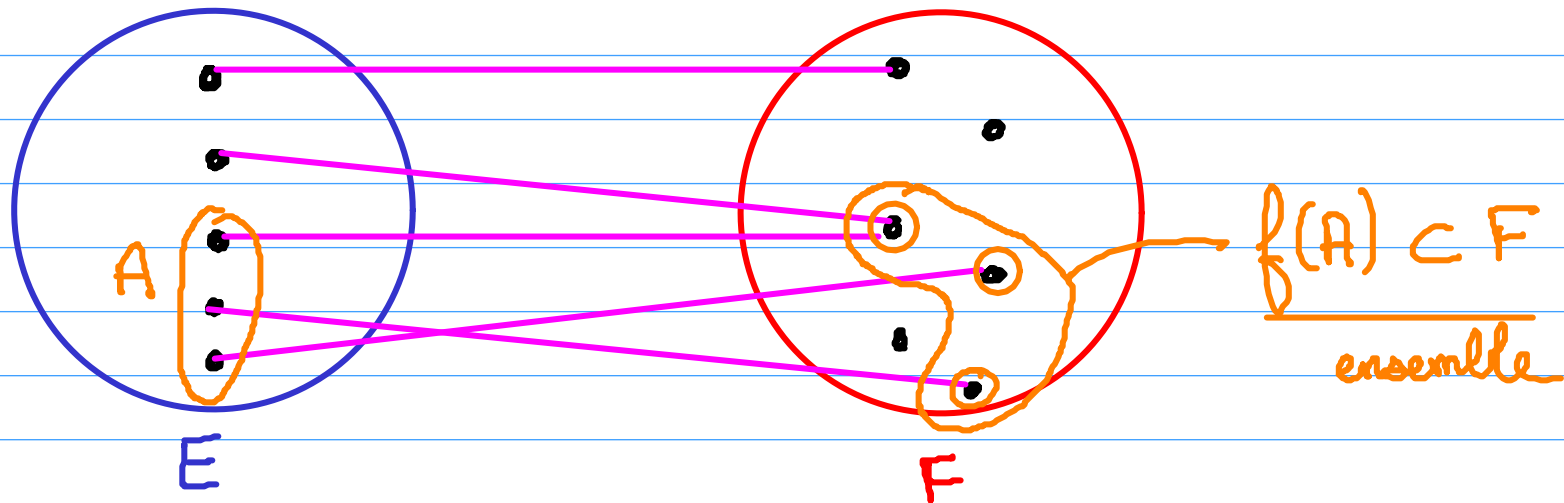
$$\mathcal{F}(E, F)$$

ou

$$F^E$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\text{suites})$$

Image directe $A \subset E$ $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$



Exemple : $f: x \mapsto x^2$

$$f([-1; 2]) = [0, 4[$$

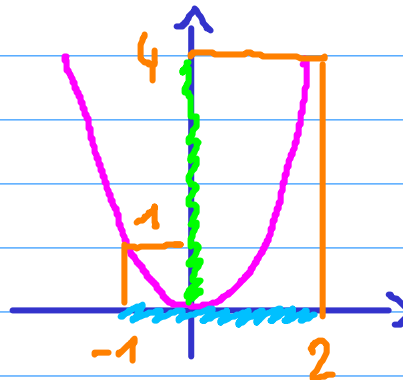
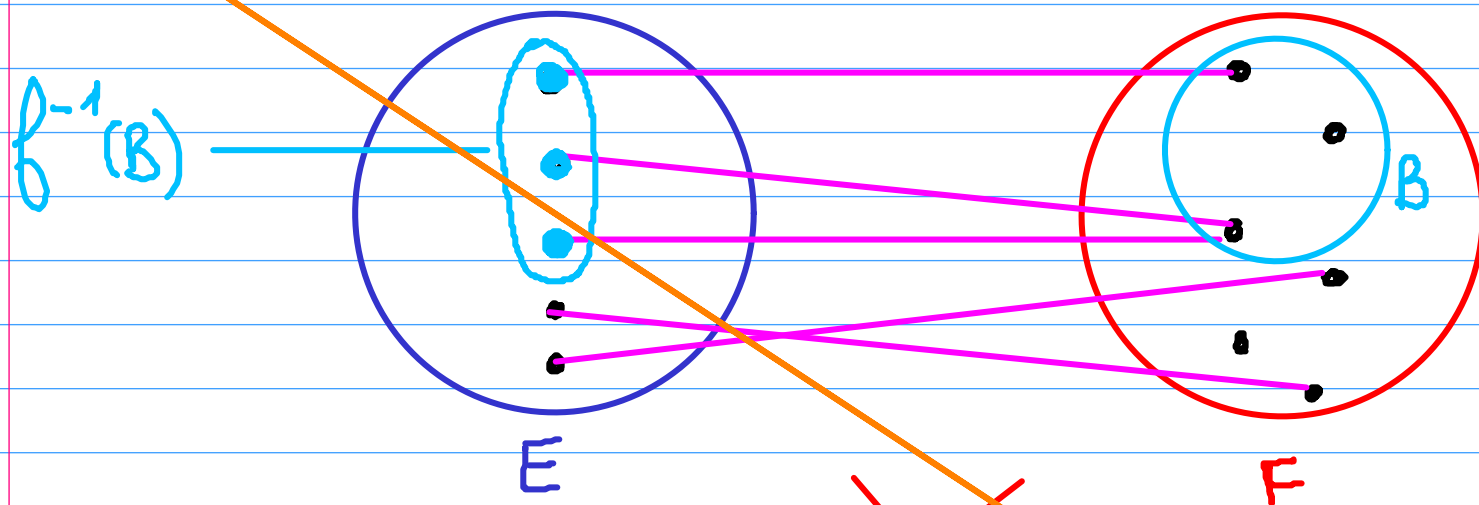


Image réciproque $B \subset F$ $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$



⚠ Pas une puissance

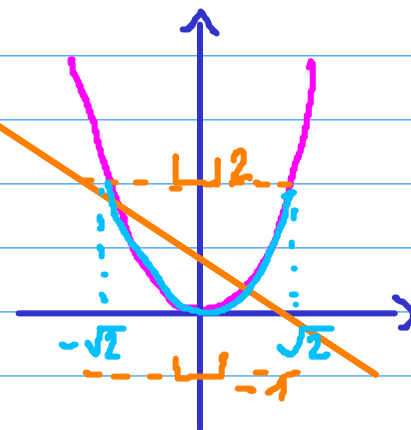
~~$f^{-1}(x)$~~

Exemple

$$f: x \mapsto x^2$$

$$f^{-1}([-1, 2[) =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$$

$$f([-1, 2[) = [0, 4[$$



À vous de jouer!

① Soit $f: E \rightarrow F$ $A_1, A_2 \subset E$ $B_1, B_2 \subset F$ Montrer que :

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

c) $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ Contre-ex.

② Déterminer :

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\sin^{-1}([0, 1[)$

c) $\exp^{-1}([-1, 4])$

d) $f(\mathbb{R})$ ou $f: x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$