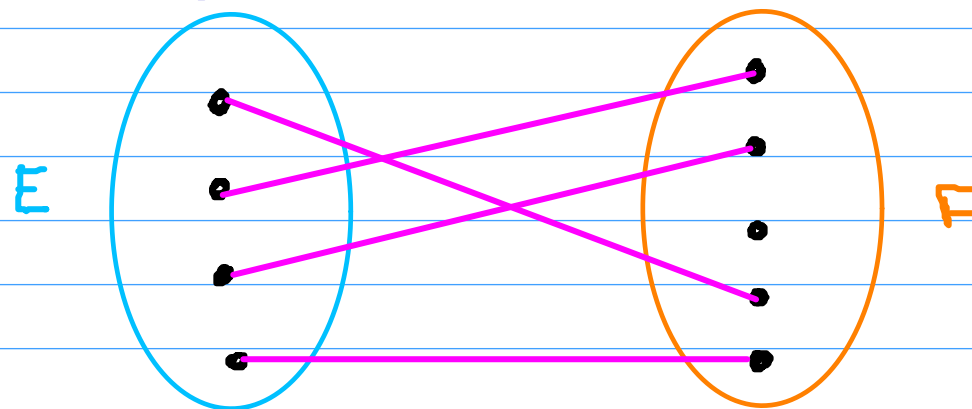


Injectivitē, surjectivitē, bijektivitē

$$f: E \rightarrow F$$

f injective : Tout $y \in F$ a au plus un antécédent par f



$$\forall (a, b) \in E^2, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad \triangle$$

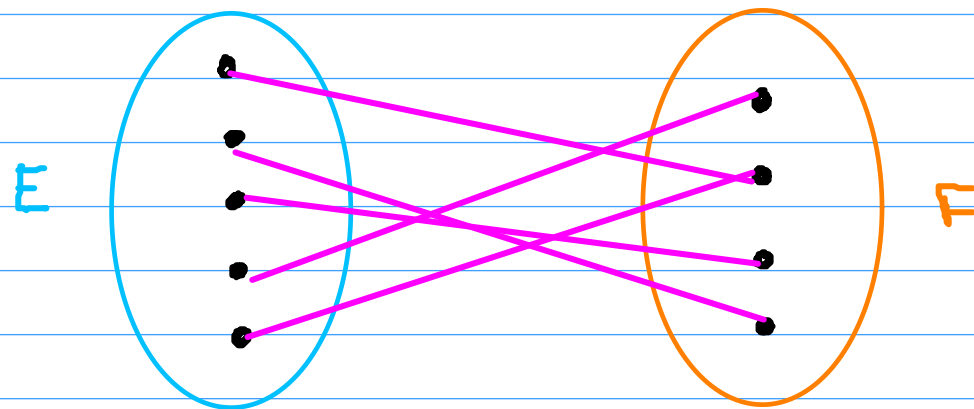
Exemple : $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}, e^a = e^b \Rightarrow a = b$$

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective

$$\sin(0) = \sin(\pi)$$

f surjective : Tout $y \in F$ a au moins un antécédent par f



$$\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y \quad \triangle !$$

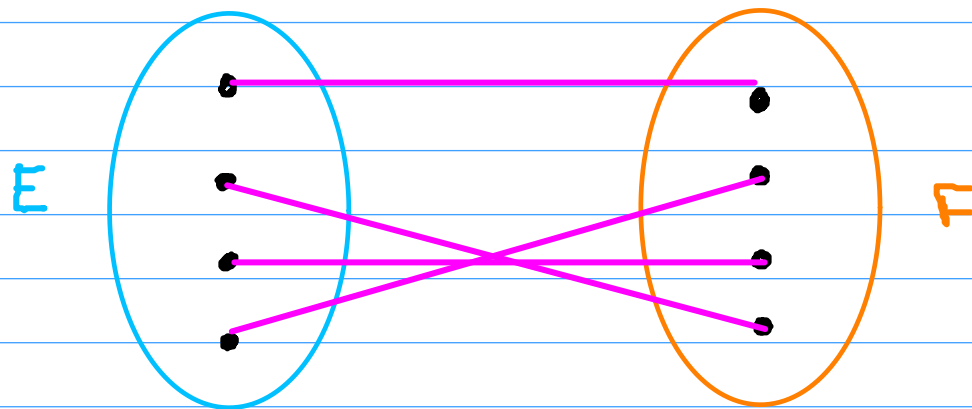
Exemple : $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective

Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $x = e^y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) = y \quad \checkmark$

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne l'est pas

$\exp(x) = 0$ n'a pas de solution

f bijective : Tout $y \in F$ a exactement un antécédent par f
injective + surjective



Exemple : $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ne l'est pas (pas surj.)

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective

$$y \in \mathbb{R}_+^* \quad x = \ln y \\ e^x = y$$

"Fabriquer" une bijection

$f: E \rightarrow F$ non injective Restreindre E (départ)

Exemple : $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non injective

$\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ injective Pas surj.

$f: E \rightarrow F$ non surjective Restreindre F (arrivée)

$f(E) = \{f(x) | x \in E\} \subset F$ $f: E \rightarrow f(E)$ surjective

Exemple : $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ pas surj $f([0, \pi]) = [-1, 1]$

$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ surj. (et donc bijective)

(Th. de la bijection)

Mondotonicité et bijectivité

E intervalle de $\mathbb{R}$

Si f est str. monotone sur E , f réalise une bijection de E sur $f(E)$

Preuve: Surj: Définition de $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$

Inj: Supposons f str. $\nearrow$

Soit $(a, b) \in E^2$ Si $a > b, f(a) > f(b)$
 $a < b, f(a) < f(b)$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \text{ (contr.)}$$

Complément: Si f continue, $f(E)$ intervalle $x, y \in I, x < y$
 $[x, y] \subset I$

Soit $a < b \in f(E)$ $\exists (x_a, x_b) \in E^2: f(x_a) = a, f(x_b) = b$

f str. $\nearrow$ $x_a < x_b$ Tvi: $\forall c \in [a, b], \exists x_c \in [x_a, x_b]: f(x_c) = c$
 $c \in f(E)$

À vous de jouer !

① Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

Si non, restreindre l'ens. de départ / arrivée pour qu'elles le soient.

a) $f_1: \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$

b) $f_2: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$

c) $f_3: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$

d) $f_4: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x \end{cases}$

② Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$

Montrer que: a) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

b) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective