

Fonctions réciproques

Soit $f: E \rightarrow F$

Fonction réciproque $f^{-1}: F \rightarrow E$

① $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1} \circ f = \text{id}_E$ (identité)

② $\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$

$f \circ f^{-1} = \text{id}_F$

Exemples :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_+^E \rightarrow \mathbb{R}_+^F \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$
$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}$$

$$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R}_+^F \rightarrow \mathbb{R}_+^E \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$$
$$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$$

Propriétés :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$
$$(f^{-1})^{-1} = f$$

$$g^{-1} \circ \underline{f^{-1} \circ f} \circ g = g^{-1} \circ g = \text{id}$$
$$f^{-1} \circ f = \text{id} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}$$



Existence de la réciproque : Soit $f: E \rightarrow F$

$f^{-1}: F \rightarrow E$ $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$ $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ f^{-1} existe $\Leftrightarrow f$ est bijective

$(\Rightarrow)$ Injectif : $(a, b) \in E^2$ $f(a) = f(b) \Rightarrow f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b)) \Rightarrow a = b$ ✓

Surj : $y \in F$ $f(f^{-1}(y)) = y$ On pose $x = f^{-1}(y) \in E$ On a $f(x) = y$ ✓

$(\Leftarrow)$ Soit $y \in F$ On pose $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f

$\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$ ② (déf. d'un antécédent)

Soit $x \in E$ $f^{-1}(f(x))$ est l'un. anté. de $f(x)$ par f

$$f(\underline{f^{-1}(f(x))}) = \underline{f(x)}$$

f injective $\Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$ ①

Dérivée : $f: E \rightarrow F$ bijective

$$\Delta f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \Rightarrow f^{-1} \text{ dérivable en } b = f(a) \text{ et } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \\ f'(a) \neq 0 \end{array} \right.$$

Astuce : $f(f^{-1}(x)) = x \xrightarrow{\text{dér.}} (f^{-1})'(x) \boxed{f'(f^{-1}(x))} = 1$

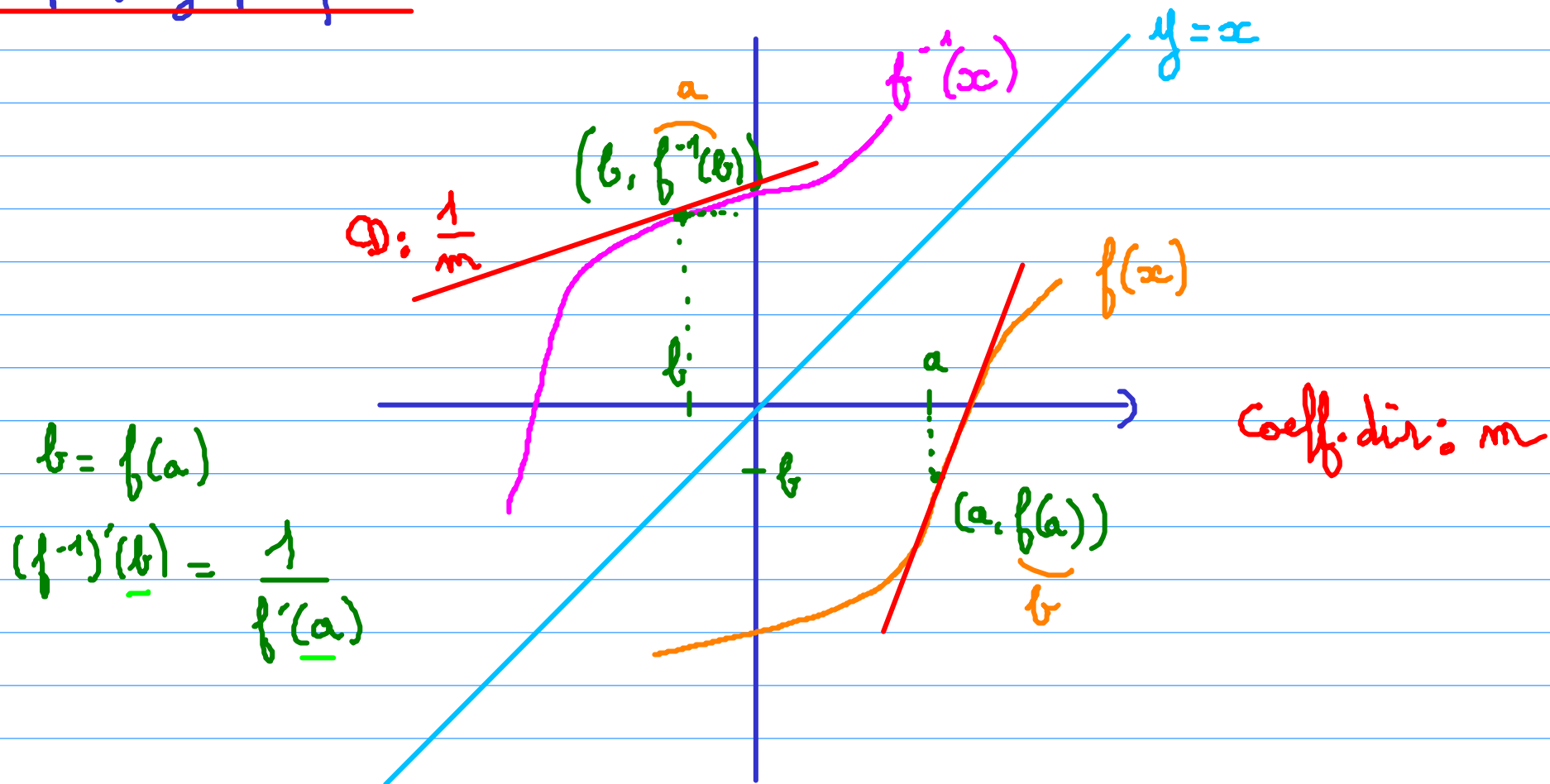
Preuve : f dérivable en a , $f'(a) \neq 0$ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$

$y \in F$ et $x = f^{-1}(y)$

$(y \rightarrow b?)$ $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{y \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = (f^{-1})'(b)$

Continuité de f^{-1} : $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \rightarrow b]{x} f^{-1}(b)$

Aspects graphiques

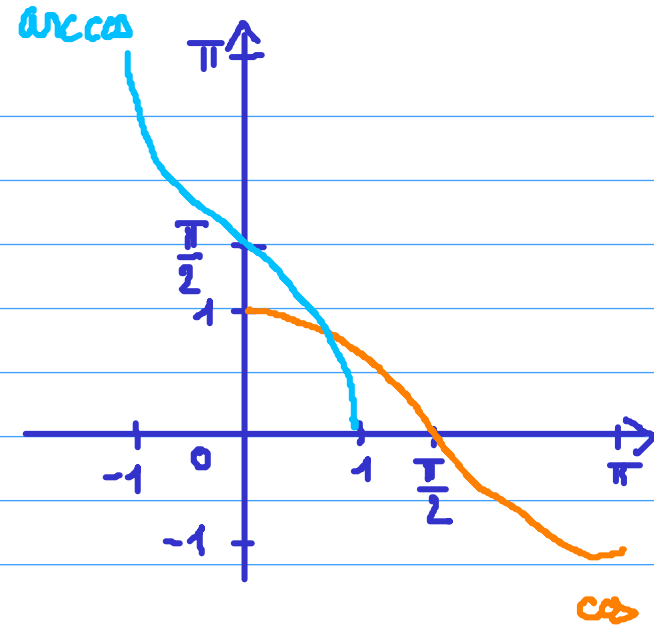


Fonctions circulaires réciproques

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \quad (\text{str.}, \text{bijective})$$

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$a \in [0, \pi] \quad \cos'(a) = 0 \Leftrightarrow -\sin(a) = 0 \\ \Leftrightarrow a \in \{0, \pi\}$$



$$\cos(0) = 1 \quad \cos(\pi) = -1 \quad \arccos \text{ dérivable sur }]-1, 1[$$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \in [0, \pi] \quad \underbrace{\sin(\arccos x)}_{\geq 0} = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - \cos(\arccos x)^2} \\ = \sqrt{1 - x^2}$$

À vous de jouer!

① Soit $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Définir l'ens. d'arrivée pour que f soit bijective et déterminer f^{-1} .

② Déterminer la dérivée de la réciproque de :

a) $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$

b) $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$