

Fonctions réciproques (Exercices)

① Soit $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Définir l'ens. d'arrivée par que f soit bijective et déterminer f^{-1} .

$f(\mathbb{R})$? f dér. / $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

f str $\nearrow$ (injective) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$ $f(x) = \frac{\cancel{e^x}(1 - e^{-x})}{\cancel{e^x}(1 + e^{-x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

$f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ Soit $y \in]-1, 1[$

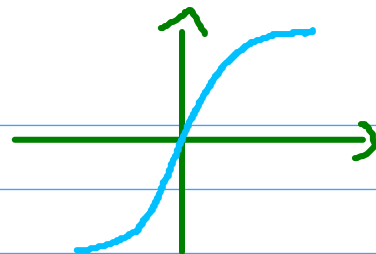
$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x - 1 = ye^x + y \Leftrightarrow e^x(1 - y) = y + 1$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y} \in]0, 2[$ $\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ $f^{-1}: \begin{cases}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{cases}$

② Déterminer la dérivée de la réciproque de :

$$a) \sin: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$\arcsin: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$f^{-1} \text{ dérivable en } y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable en } x = f^{-1}(y) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

$\sin'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$
 $\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow y \in \{-1, 1\}$

$\arcsin$ dérivable sur $] -1, 1[$ et $\forall x \in] -1, 1[$

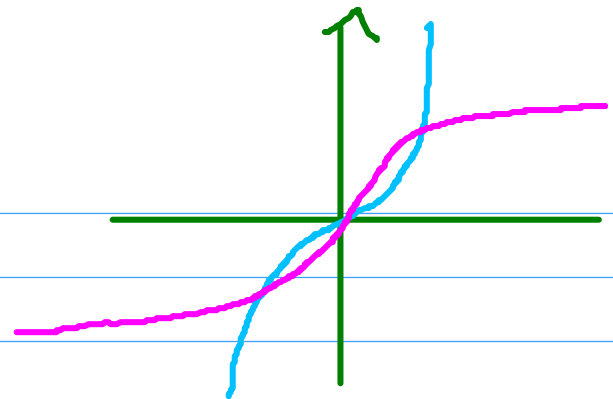
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{\cos(\arcsin x)}{\geq 0} = \sqrt{\cos^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$(\arcsin + \arccos)' = 0$$

$$b) \tan:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$f^{-1} \text{ dér. en } y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable en } x = f^{-1}(y) \\ f'(x) \neq 0 \end{cases} \quad \tan'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(x)} = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$$

Exercice bonus

Soit $x \neq 0$. Montrer que :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Solutions : martinrousard.fr