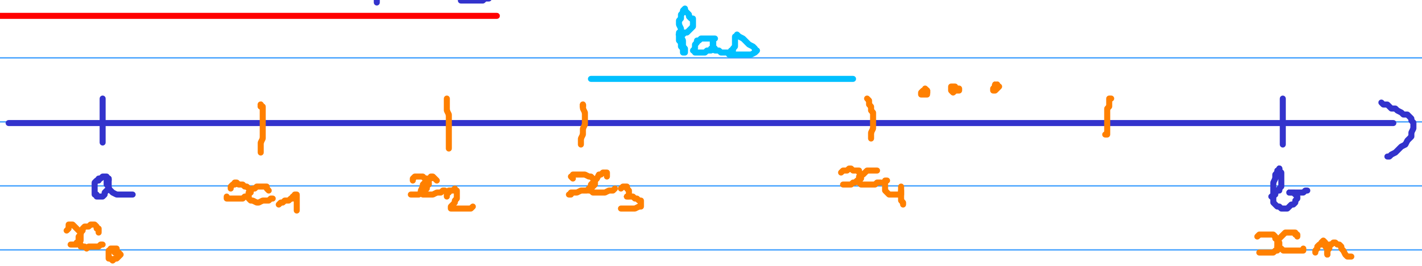
Intégration

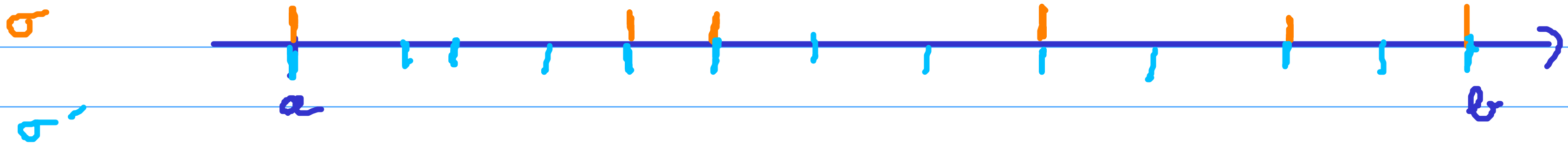
Subdivisions de $\overbrace{[a,b]}^{\text{segment}}$



$\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ $\qquad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

Pas : $\max\left\{ x_{i+1} - x_i \;\middle|\; i \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

Plus fine $\quad \sigma'$ plus fine que $\sigma \iff \sigma \subset \sigma'$



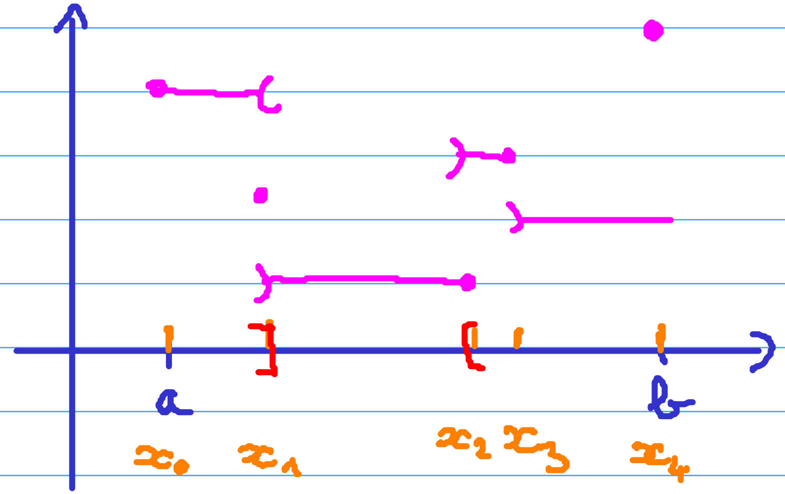
Fonctions en escalier

f est en escalier sur $[a,b]$

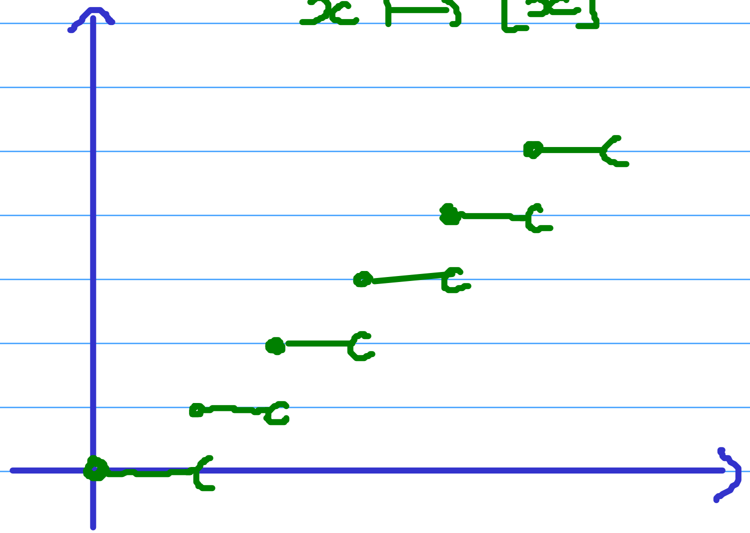
$\iff \exists\, \sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ subdivision :

$\forall i \in [0, .., n-1]$, f constante sur $]x_i, x_{i+1}[$

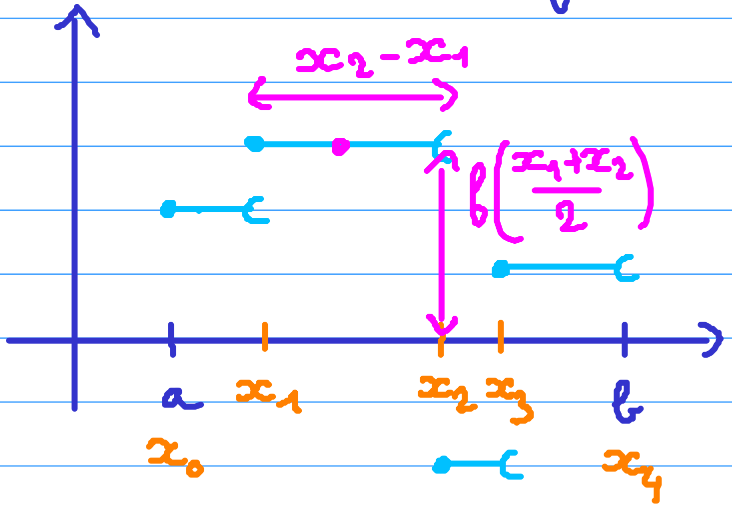
Exemples



$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$



Intégrale d'une fonction en escalier



$$\int_a^b f(t)\,dt \underset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1}-x_k)\, f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)$$

↳ linéarité

↳ séparation

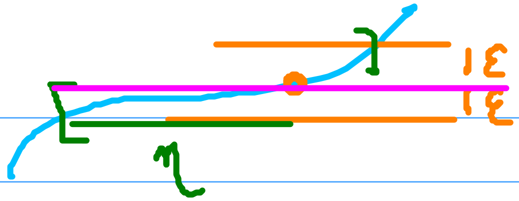
Exemple

$f : x \in [-\frac{1}{2}, 5] \longmapsto \lfloor x \rfloor$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{5} \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times 2 + 1\times 3 + 1\times 4 = 9{,}5$$

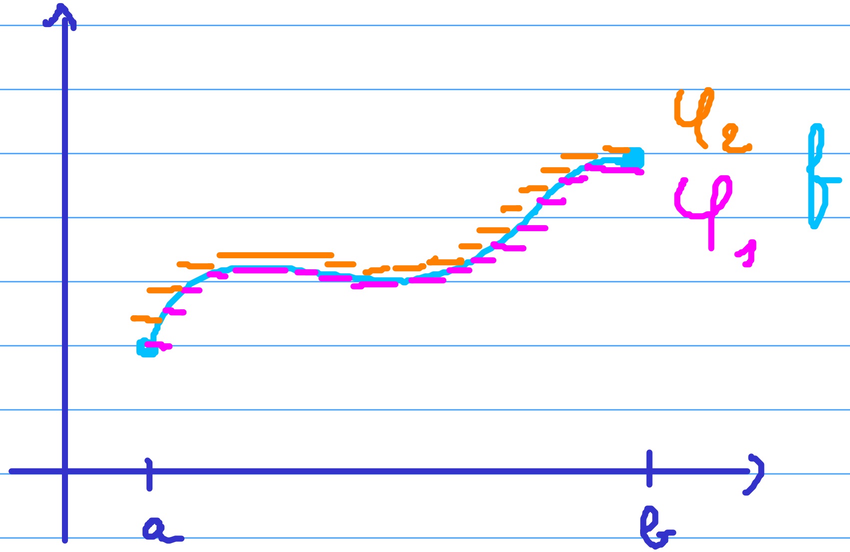
$]-\frac{1}{2},0[$ $\quad]0,1[$ $\quad]1,2[$ $\quad]2,3[$ $\quad]3,4[$ $\quad]4,5[$

Fonctions en escalier → Fonctions continues



Soit f continue sur $[a,b]$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \varphi_1, \varphi_2$ en escalier sur $[a,b]$: $\begin{cases} \varphi_1 \le f \le \varphi_2 \\ \varphi_2 - \varphi_1 \le \varepsilon \end{cases}$



$$\int_a^b \varphi_1 \overset{\text{Sommes}}{\le} \int_a^b \varphi_2 \qquad \text{(en esc.)}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \underset{\text{déf.}}{=} \sup\left\{ \int \varphi_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_1 \text{ esc.} \\ \varphi_1 \le f \end{array} \right\}$$

$$= \inf\left\{ \int \varphi_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_2 \text{ esc.} \\ \varphi_2 \ge f \end{array} \right\}$$

À vous de jouer !

① Montrer que la somme de deux fonctions en escalier (sur $[a,b]$) est une fonction en escalier.

② Soit $a < b < c$

Montrer que si f est en escalier sur $[a,c]$, alors elle l'est sur $[a,b]$ et $[b,c]$ et :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$