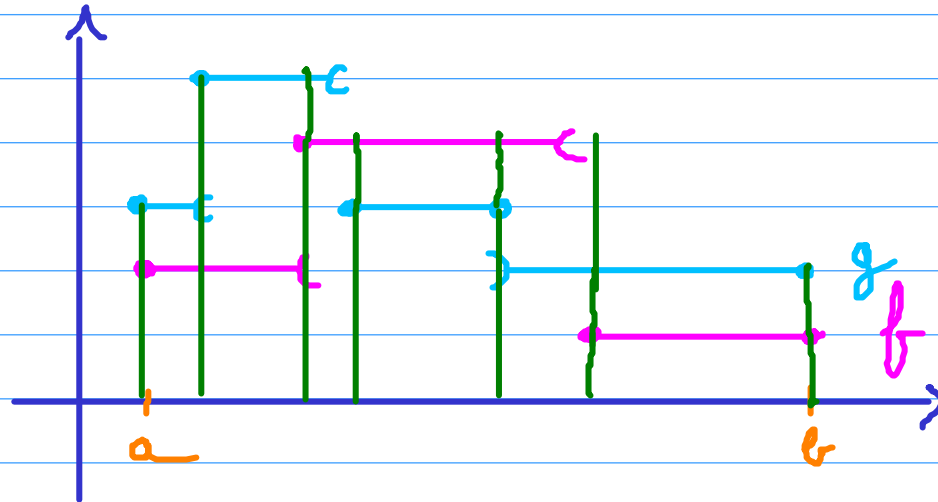


Intégration (Exercices)

① Montrer que la somme de deux fonctions en escalier (sur $[a, b]$) est une fonction en escalier.

f en escalier $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n$ $\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$

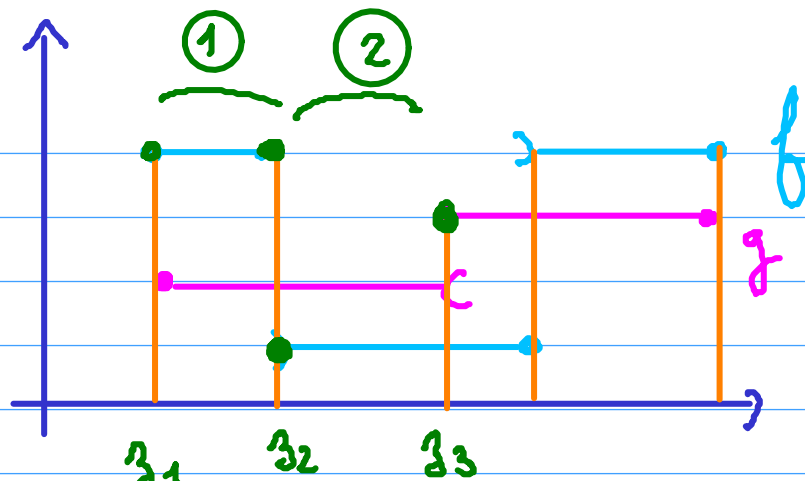
g en escalier $y_0 = a < y_1 < \dots < y_m$ $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$



$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ n éléments distincts $z_0 = a < z_1 < \dots < z_n = b$

soit $i \in \{0, \dots, p-1\}$

autres cas : idem



①

• Si $z_i \in \sigma_1$ et $z_{i+1} \in \sigma_1$: f const. sur $]z_i, z_{i+1}[$

$]z_i, z_{i+1}[$ inclus dans $]y_k, y_{k+1}[$, g const $|]y_k, y_{k+1}[$
viennent de σ_1 viennent de σ_2 $|]z_i, z_{i+1}[$

②

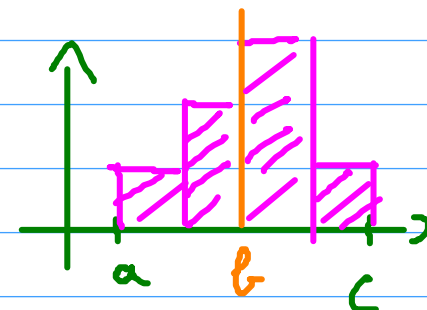
• Si $z_i \in \sigma_1$ et $z_{i+1} \in \sigma_2 \setminus \sigma_1$

$z_i = x_k$ $z_{i+1} < x_{k+1}$ f const $|]x_k, x_{k+1}[$ donc $|]z_i, z_{i+1}[$

$z_i > y_{l-1}$ $z_{i+1} = y_l$ g const $|]y_{l-1}, y_l[$ donc $|]z_i, z_{i+1}[$

② Montrer que si f est en escalier sur $[a, c]$, alors elle l'est sur $[a, b]$ et $[b, c]$ et :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$



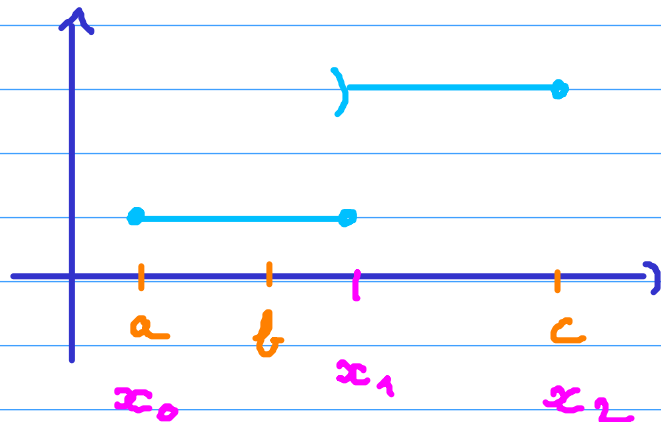
Subdivision σ $x_0 = a < \dots < x_n = c$

Si $f \in \sigma$ $x_0 = a < \dots < x_i = b < \dots < x_n = c$

$\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_i\}$ $\left. \begin{array}{l} \forall k \in \{0, \dots, n-1\}, f \text{ const. } /]x_k, x_{k+1}[\\ \sigma_2 = \{x_i, \dots, x_n\} \end{array} \right\} \rightarrow f \text{ est en esc. sur } [a, b] \text{ et } [a, c]$

$$\int_a^c f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{i-1} \dots}_{\int_a^b f(t) dt} + \underbrace{\sum_{k=i}^{n-1} \dots}_{\int_b^c f(t) dt}$$

si $b \notin \sigma$ $\exists i \in \{0, \dots, n-1\} : x_i < b < x_{i+1}$



$\sigma' = \{x_0, \dots, x_i, b, x_{i+1}, \dots, x_n\} \rightarrow \text{cas } b \in \sigma$

$$(x_{i+1} - x_i) f(\dots) = (x_{i+1} - b) f(\dots) + (b - x_i) f(\dots)$$

Exercice bonus

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, montrer que :

$$\int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Solutions : martinroussard.fr