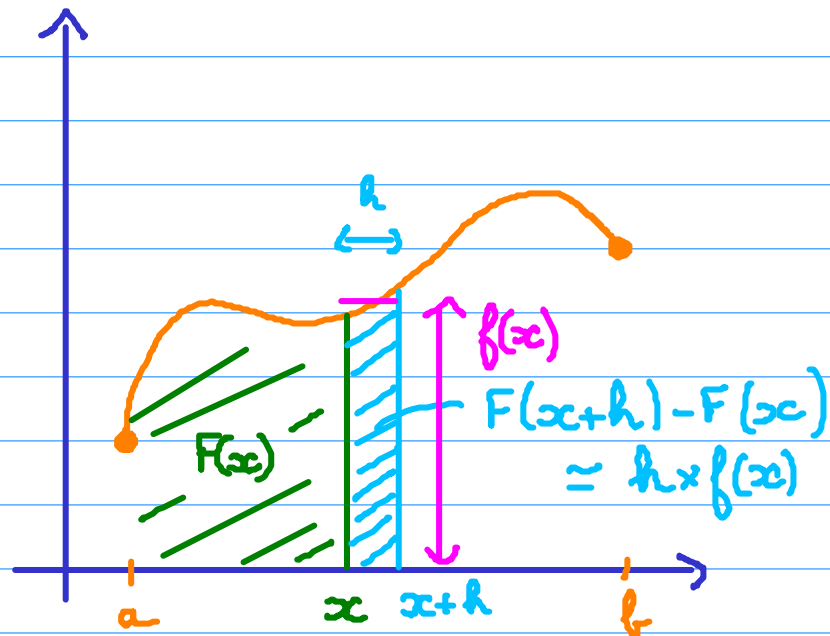


Lien dérivation-intégration

Théorème fondamental de l'analyse f continue sur $[a, b]$

Soit $F: x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t) dt$ $f \in C^0[a, x]$

F est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$



$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

Théorème de la moyenne

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(t) dt$$

$$f \text{ continue sur } [a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

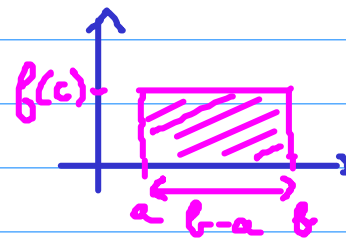
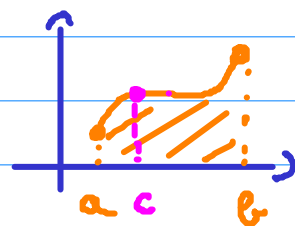
Preuve f continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ bornée et atteint ses bornes

$$f([a, b]) = [m, M]$$

$$\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt}_h \leq M$$



$$\text{rvi : } \exists c \in [a, b] : f(c) = h = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration du TFA

$$F: x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

$$x \in [a, b[, h > 0$$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt \quad [x, x+h]$$

$$\text{Moyenne: } \exists \underline{c_h} \in [x, x+h] : f(c_h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$x \leq c_h \leq x+h$$

$$c_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$$

$$f \text{ c}^0 \quad f(c_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

$h < 0$ idem

Primitives F primitive de f si F dérivable et $F' = f$

Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive

TFA: $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ dérivable et $F' = f$

F et G deux primitives de $f \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b], F(x) = G(x) + C$

$(F-G)$ dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$:

$$(F-G)'(x) = F' - G' = f - f = 0 \quad F-G \text{ constante}$$

Théorème fondamental de l'analyse (partie 2)

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ F \text{ primitive de } f \end{array} \right\} \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Preuve: $G: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ primitive de f

$$\exists C \in \mathbb{R}: \forall x \in [a, b], G(x) = F(x) + C$$

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

À vous de jouer!

① Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$

② Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose $\forall (c,d) \in [a,b]^2$, $\int_c^d f(t) dt = 0$
 $c < d$

Montrer que $f = 0$.

