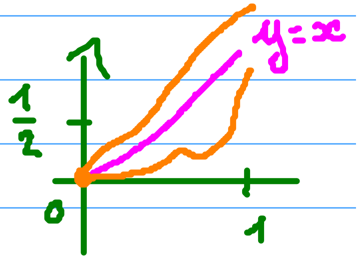
Lien dérivation - intégration (Exercices)

$g(x) \neq 0$ $\quad$ $g(x) > 0$

① Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$



$g : x \in [0,1] \longmapsto f(x) - x$

$G : x \in [0,1] \longmapsto \int_0^x g(t)\,dt$ $\quad$ TFA : G dérivable sur $[0,1]$

continue

$$G(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0$$

$$G(1) = \int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 0$$

Rolle : $\exists x_0 \in]0,1[\; : G'(x_0) = 0 \implies g(x_0) = 0 \implies f(x_0) = x_0$

② Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

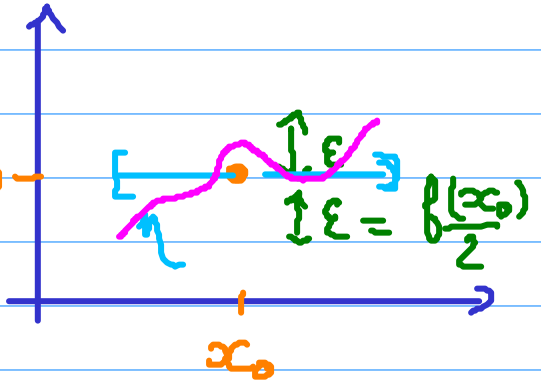
On suppose $\forall (c,d) \in [a,b]^2, \ \int_c^d f(t)\,dt = 0$

Montrer que $f = 0$.

Soit $x \in [a,b]$, on a $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt = 0$

F dér/ $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $\underbrace{F'(x)}_{=0} = f(x)$

$f(x_0) > 0$



$\exists \eta > 0 : \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \ f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$

$$\underbrace{\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(t)\,dt}_{=0} \geq 2\eta \times \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

absurde

Exercice bonus Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

On a $\int_0^1 f^2(t)\,dt = \int_0^1 f^3(t)\,dt = \int_0^1 f^4(t)\,dt$

Montrer que $f : x \mapsto 0$ ou $f : x \mapsto 1$

Solutions : martintroussard.fr