

Calcul d'intégrales

Primitives usuelles

$\frac{\sin}{\cos}$

Fonction	Primitive	Domaine
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^* \text{ ou } \mathbb{R}_-^*$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$] -1, 1[$

Exemple : $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$ $\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{d\arctan} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$

Intégration par parties u, v dérivables sur $[a, b]$ de dérivée continue

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Preuve $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

TFA : $[uv](t) \Big|_a^b$

⚠ Dérivée de v est ⊕ simple $\arctan$, polynôme, $\ln$

Primitive de u' est ⊕ simple e^x , $\cos$, $\sin \leftarrow$ idem

IPP successives

$$\underline{I} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\cos x}_v dx = \left[e^x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\sin x}_{v'} dx$$

$u = e^x$
 $v' = \cos$

$$\begin{aligned} u = e^x \quad v' = -\sin x &= -1 \\ &= -1 \end{aligned} \quad + \left[e^x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$$

$- \underline{I}$

$$2\underline{I} = -1 + e^{\pi/2}$$

$$\underline{I} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

⚠ Polynômes $\int x^2 e^x dx$

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f' \circ \varphi$$

φ dérivable et de dérivée C^0 sur $[a, b]$
 $f \in C^0$ sur $\varphi([a, b])$

Changement de variable

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b \underbrace{f(\varphi(x))}_{\text{bleu}} \underbrace{\varphi'(x)}_{\text{orange}} dx$$

Exemple : $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx$

$$t = e^x = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = e^x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \times e^x dx = \int_1^e \frac{1}{1+t} dt \quad \times$$

⚠ $\varphi'(x)$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{\underbrace{e^x}_{\text{orange}}^{\varphi'(x)}}{e^x(1+e^x)} dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)} dt$$

En pratique

$$t = \varphi(x)$$

$$dt = \underbrace{dx \times \varphi'(x)}_{\text{bleu}}$$

À vous de jouer !

① Calculer :

a) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

b) $\int_1^e \ln^2(x) \, dx$

② Calculer :

a) $\int_0^3 \frac{1}{x^2 + 9} \, dx$

b) $\int_0^{\pi/6} \cos^3(x) \, dx$

③ Calculer :

a) $\int_1^e \frac{1}{x + x(\ln x)^2} \, dx$

b) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \, dx$