

Équations différentielles

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Au lycée : $y' = ay$ $a \in \mathbb{R}$ $y(t) = C e^{at}$

$y' = ay + b$ $a, b \in \mathbb{R}$

$u = y + \frac{b}{a}$ $u' = y'$

$au = ay + b = y' = u'$

$au = u'$

$u(t) = C e^{at}$

$y(t) = C e^{at} - \frac{b}{a}$

Cas général : a, b fonctions continues sur un intervalle

$y' + a(t)y = b(t)$

Complète: $y' + a(x)y = b(x)$

Équation homogène $y' + a(x)y = 0$

Solutions A primitive de a $\{t \mapsto C e^{-A(t)} \mid C \in \mathbb{R}\}$

Preuve $(y e^A)' = y' e^A + y \times a e^A = e^A (y' + a y)$

y solut^o de l'éq-homogène $\Leftrightarrow y'(t) + a(t)y(t) = 0$

$\Leftrightarrow (y e^A)'(t) = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : y(t) e^{A(t)} = C$

$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : y(t) = C e^{-A(t)}$

Exemple $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ $a(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $A(t) = \arcsin t$

$y: t \mapsto C e^{-\arcsin t}, C \in \mathbb{R}$

Équation complète $y' + a(t)y = b(t)$

Solution particulière (y_0) $y_0' + a(t)y_0 = b(t)$

$$(y - y_0)' + a(t)(y - y_0) = 0 \quad \leftarrow \text{eq. homogène}$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = C e^{-A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = y_0 + C \underline{e^{-A(t)}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\neq 0$

Recherche d'une solution particulière

$$y = \underline{C} e^{-A(t)} \text{ sol. de l'éq. homogène}$$

$$y = C(t) e^{-A(t)} \text{ sol de l'éq. complète}$$

Méthode de variation de la constante

$y = C(t) e^{-A(t)}$ solution de $y' + a(t)y = b(t)$?

$$y' = C' e^{-A} + C \times (-a) \times e^{-A} = (C' - \underline{Ca}) e^{-A} \quad A' = a$$

$$ay = \underline{Ca e^{-A}}$$

$$y' + ay = C' e^{-A} = b$$

$$C' = b e^A \Rightarrow C \text{ primitive de } t \mapsto b(t) e^{A(t)}$$

Conditions initiales $y(t_0) = y_0$

$\exists !$ pim. de $b e^A$ vaut ... en $t = t_0$

Exemple Résolution de $y' - 2ty = t$

$$y' + ay = b$$

$$a(t) = -2t \quad A(t) = -t^2$$

$$b(t) = t$$

Eq. homogène $y' - 2ty = 0$ $y(t) = \underline{C} e^{t^2}$, $C \in \mathbb{R}$

Sol. particulière de la forme $y(t) = \underline{C(t)} e^{t^2}$

C ? $\left(C \text{ primitive de } t \mapsto b(t) e^{A(t)} = t e^{-t^2} \right.$

$$(e^{-t^2}) \xrightarrow{\text{dériv.}} -2te^{-t^2}$$

$$C(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \textcircled{K} e^{t^2}, \quad K \in \mathbb{R}$$

À vous de jouer !

① Résoudre $y' - t y = 2t$

② Résoudre $y' + y = \frac{1}{1 + e^t}$

③ Résoudre $y' + \frac{t-1}{t} y = t^2$